



As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas

The Different “Personalities” of the Rational Number Approached through Problem-solving

Lourdes de la Rosa Onuchic¹
Norma Suely Gomes Allevato²

Resumo

Neste artigo, pretende-se abordar as diferentes “personalidades” do número racional e o conceito de proporcionalidade, analisando as possibilidades de utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa metodologia parte do princípio de que a construção do conhecimento pode ser realizada a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos. Os diferentes significados do número racional: ponto racional, quociente, fração, razão e operador são construtos que dependem das teorias matemáticas em que se inserem e das situações a que se referem na resolução de problemas. Serão apresentados alguns dados que foram desenvolvidos em cursos de formação continuada de professores visando à compreensão das diferentes “personalidades” do número racional. Em geral, essas “personalidades” não são facilmente identificadas, por professores e alunos, razão das grandes dificuldades encontradas durante a resolução de problemas envolvendo números racionais. Uma dessas “personalidades”, a razão, fundamenta o conceito de proporcionalidade, relevante por ser uma idéia unificadora na Matemática.

¹ Doutora em Matemática pela USP-São Carlos/SP. Professora voluntária e Coordenadora do GTERP-Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/UNESP-Rio Claro/SP. Endereço para correspondência: Rua Machado de Assis, n. 302., CEP: 13451-000, Santa Bárbara d’Oeste/SP. lonuchic@vivax.com.br

² Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro/SP. Professora e pesquisadora da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo/SP. Membro do GTERP-Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da UNESP-Rio Claro/SP. Endereço para correspondência: Rua Cônego Manoel Vaz, n.584, ap.81, CEP: 02019-050, São Paulo/SP. normallev@uol.com.br

Palavras-chave: Números Racionais e Proporcionalidade. Resolução de Problemas. Formação de Professores.

Abstract

We address the different “personalities” of the rational number and the concept of proportionality, analyzing the possibilities for using the Mathematics Teaching and Learning through Problem-solving Method. This method is based on the principle that knowledge can be constructed through the use of problems that generate new concepts and new contents. The different meanings of rational number – rational point, quotient, fraction, ratio, and operator – are constructs that depend on mathematical theories in which they are imbedded and the situations that evoke them in problem-solving. Some data will be presented from continuing education courses for teachers, aiming to contribute to understanding regarding the different “personalities” of the rational number. In general, these “personalities” are not easily identified by teachers and students, which is the reason for the many difficulties encountered during problem-solving involving rational numbers. One of these “personalities”, the ratio, provides the basis for the concept of proportionality, which is relevant because it is a unifying idea in mathematics.

Key-words: Rational Numbers and Proportionality. Problem Solving. Teacher Education.

Introdução

Reconhece-se que ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas para se fazer isso. Não há um caminho único para ensinar e aprender matemática e mudar nosso sistema de educação matemática exige criar uma consciência do quê, do como e do porquê na Matemática.

Os Standards (NCTM; 2000) apresentam seis princípios para a matemática escolar: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia; cinco padrões de conteúdo: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, Análise de Dados e Probabilidade, descrevendo os conteúdos que os estudantes devem aprender; e cinco padrões de procedimento: Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões, e Representação, realçando os caminhos de aquisição e de uso do conhecimento do conteúdo construído.

Neste trabalho, destacamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que abrange o

primeiro padrão de conteúdo: **Números e Operações** e o primeiro de procedimento: **Resolução de Problemas**, como veículos para trabalhar números racionais e proporcionalidade.

Educadores matemáticos concordam que o ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais permanecem um sério obstáculo no desenvolvimento matemático dos alunos. Para Ohlsson (1991), a dificuldade associada aos números racionais é de natureza semântica, conseqüência da natureza composta dos números racionais. Por exemplo: como os significados de 2 e 3, combinados, podem dar origem ao significado de $\frac{2}{3}$? Essa dificuldade é, também, conseqüência de um emaranhado de idéias, relacionadas e parcialmente sobrepostas, que circundam os números racionais. Em marcante contraste, não há uma clara concordância sobre como facilitar a aprendizagem desses conceitos. A expressão “diferentes personalidades”, no presente texto, refere-se aos números racionais associados aos diferentes significados que eles podem assumir, em virtude de tais idéias. Da perspectiva da pesquisa e do desenvolvimento curricular, o problema é descrever estas “personalidades” com clareza e profundidade suficientes tais que a organização de experiências de aprendizagem para os alunos tenha uma firme fundamentação teórica.

Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas

Vergnaud (1991, 1994) introduziu a idéia de que um campo conceitual é um conjunto de problemas e situações necessários ao tratamento de tipos diferentes, mas estreitamente interconectados, de conceitos, procedimentos e representações. Como exemplo ele citou o campo conceitual multiplicativo e identificou os amplos ramos desse campo conceitual ao introduzir: multiplicação, divisão, frações, razão, número racional, função linear e n-linear, análise dimensional e espaços vetoriais.

O ensino dos números racionais está formando estudantes com concepções demasiadamente simplistas de números e operações sobre

números, e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas. Hiebert e Behr (1991) recomendam que: (a) o ensino deveria ser mais orientado para o significado do que para o símbolo; (b) em lugar de se colocar o conhecimento como um pacote pronto e acabado o ensino deveria encorajar os alunos a construírem seu próprio conhecimento.

Segundo Van de Walle (2001), professores de matemática devem envolver, em seu trabalho, quatro componentes básicos: (1) a valorização da disciplina Matemática em si mesma - o que significa “fazer matemática”; (2) a compreensão da forma como os estudantes aprendem e constroem idéias; (3) a habilidade em planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas, (4) a habilidade em integrar a avaliação ao processo de ensino para aumentar a aprendizagem, aprimorando-o no dia-a-dia.

O trabalho com números racionais precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de “como fazer” são privilegiadas. Considere-se, então, um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos; a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. (VAN DE WALLE, 2001; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

Quando se faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, há uma forte atividade de investigação, tanto por parte do professor quanto por parte do aluno e até por parte de ambos sobre o processo. O professor pesquisa quando escolhe ou cria problemas adequados à construção de novo conhecimento sobre um determinado tópico do programa, daquela determinada série; quando seleciona, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; quando planeja as questões-chave para conduzir os alunos, numa reunião plenária com a classe toda, na análise dos resultados apresentados e chega ao consenso sobre os resultados obtidos; ele pesquisa quando prepara a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado.

Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já

construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando idéias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução.

Além disso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas integra uma concepção mais atual sobre avaliação, constituindo-a numa oportunidade de aprender. A avaliação será construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino e aumentando a aprendizagem.

Apesar de não haver formas rígidas de programar e colocar em prática o trabalho com o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o auxílio de um grupo de professores de um Curso de Educação Continuada, foi redigido um roteiro de atividades que pode servir como referência ou orientação aos professores interessados em trabalhar com essa metodologia. Ele considera as seguintes etapas:

- **Formar grupos e entregar uma atividade.**

Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado. Progredir em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo colaborativo e deve-se dar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Assim, devem-se organizar os alunos em pequenos grupos, permitindo que sua aprendizagem, em sala de aula, se realize, também, no contexto desses grupos.

- **O papel do professor**

O papel do professor, nesta etapa do trabalho, muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem. O professor deve lançar questões desafiadoras e ajudar os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para superar as dificuldades. O professor, ao fazer a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. As resoluções realizadas nos grupos devem ser apresentadas, por escrito, ao professor.

- **Resultados na lousa**

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor, na lousa, anota os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados, feitos por diferentes caminhos, etc.

- **Plenária**

O professor chama todos os alunos para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, têm condições de participar, juntamente com o professor, na exploração e discussão dos resultados.

- **Análise dos resultados**

Nesta fase os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são trabalhados. Outra vez surgem problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o “levar o trabalho à frente”. O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.

- **Consenso**

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, buscase um consenso sobre o resultado pretendido.

- **Formalização**

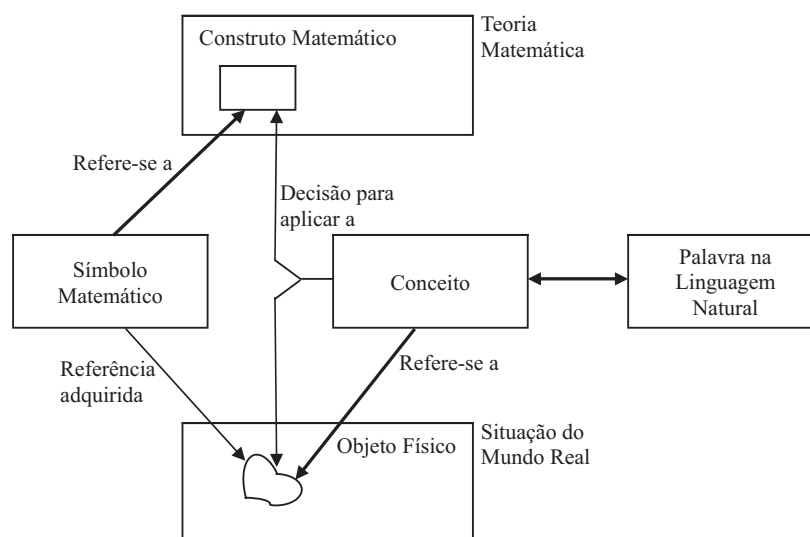
A partir do consenso, num trabalho conjunto, professor e alunos, com o professor na lousa, fazem uma síntese daquilo que se objetivava aprender a partir do problema ou da situação-problema e, formalmente, o professor coloca as definições, identifica as propriedades, faz as demonstrações, etc. (ALLEVATO, 2006; ONUCHIC, 2004).

A maneira de implementar aulas de matemática a partir de problemas depende, também, da criatividade e do entusiasmo do professor. Os problemas propostos para cada aula têm que ser cuidadosamente preparados pelo professor e novos para os alunos. Muitos deles podem ser retirados ou adaptados das listas que os livros didáticos trazem no final de seus capítulos.

Neste trabalho apresentamos uma série de problemas visando à construção das diferentes “personalidades” dos números racionais. Envolvendo-se na resolução desses problemas, os alunos participam ativamente da construção desses conceitos.

Diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas

As diferentes “personalidades” que os números racionais podem assumir constituem campos semânticos distintos. Para compreender o significado dos “números racionais” é preciso considerar a teoria matemática à qual eles estão submetidos, a classe de situações do mundo real a que eles se aplicam, e as relações entre a teoria e estas situações.



**A relação entre significado matemático e significado aplicacional
(OHLSSON, 1991, p. 62)**

Muitas situações do mundo real exigem o conhecimento de números racionais: medir a quantidade de farinha necessária para fazer um bolo, cortar um pedaço de tecido para fazer uma blusa ou calcular a probabilidade de ocorrer um evento. Além disso, historicamente, o desenvolvimento dos números racionais fornece um meio de se fazer a transição da contagem para a medida. Como a Matemática continua a desenvolver-se como uma disciplina, outros usos para os números racionais poderão ser encontrados. A teoria da probabilidade formulada por Blaise Pascal e Pierre de Fermat, durante o século

XVII, e a geometria dos fractais, formulada por Benoit Mandelbrot, no século XX empregam números racionais. (BOTTA, 1997; ONUCHIC; BOTTA, 1997; ONUCHIC; BOTTA, 1998).

Sabe-se que o conjunto dos números racionais, denotado por Q , é apresentado por meio de uma relação entre seus elementos:

$$Q = \left\{ x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Observa-se que aqui foi dito que todo número é racional quando pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, embora haja, em alguns livros didáticos, a exigência adicional da irredutibilidade de a e b .

A propriedade estrutural que permite ampliar o conjunto dos números inteiros Z para o conjunto dos números racionais Q garante que, para qualquer número inteiro n , $n \neq 0$, existe um número $\frac{1}{n}$, inverso multiplicativo de n , tal que $n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Reys e Barger (1994) relatam que uma professora de 6ª série perguntou a seus alunos “o que cada um deles poderia dizer sobre $\frac{2}{5}$ ” Eles fizeram várias afirmações diferentes, como estas: •é uma coisa parecida com metade; •é menor do que $\frac{1}{2}$; •é maior do que $\frac{1}{4}$; •é o dobro de $\frac{1}{5}$; •duas vezes $\frac{2}{5}$ quase faz um todo; •pode-se dizer que ele vale 0,4; •é uma fração própria; •é o mesmo que 40%; •é um número racional; •é o mesmo que $\frac{8}{20}$; •segunda-feira e terça-feira fazem $\frac{2}{5}$ de nossa semana escolar.

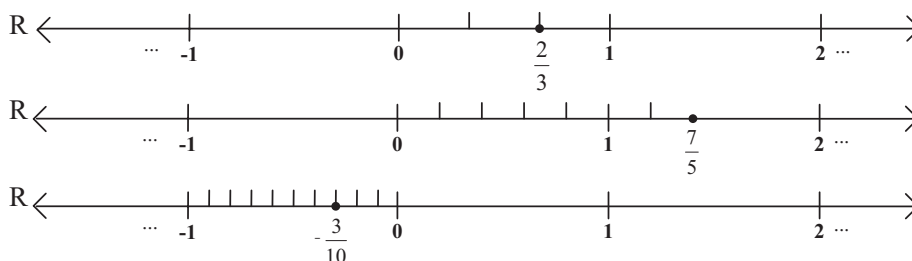
Esses estudantes manifestaram um bom sentido para números racionais, relacionando-os com suas próprias experiências, criando extensões para elas, exibindo um sentido para tamanho e significado, além de uma variedade de expressões associadas a $\frac{2}{5}$.

A professora deu oportunidade aos estudantes para coletar e verbalizar seu conhecimento, ouvir os outros e construir sobre suas idéias, e criar suas próprias representações. Este procedimento é consistente com a metodologia de ensino aqui sugerida, onde o problema é ponto de partida para a construção de novos conceitos.

Apresentaremos, a seguir, problemas geradores das diferentes “personalidades” dos números racionais.

✓ Ponto racional

Problema 1: Localizar os números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{-3}{10}$ na reta.



Este problema oferece aos estudantes a oportunidade de trabalhar com a “personalidade” do número racional chamada **ponto racional**: todo número racional $\frac{a}{b}$ ocupa **um ponto bem definido na reta** e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional.

Estudantes e professores em cursos de formação, ao resolverem esse problema, em geral fazem a divisão dos termos constituintes dos números racionais dados, a fim de obter uma aproximação decimal antes de localizar o

ponto na reta: para $\frac{2}{3}$ utilizam a aproximação 0,6 ou 0,66 ou, ainda, 0,666,

etc. É preciso, nesse momento, que se lhes reforce que $\frac{2}{3}$ e 0,6, ou as outras aproximações, não correspondem ao mesmo ponto. É preciso que

compreendam que $\frac{2}{3} = 0,666\dots$, uma dízima periódica simples cuja fração

geratriz é $\frac{2}{3}$.

✓ **Quociente**

Problema 2: Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

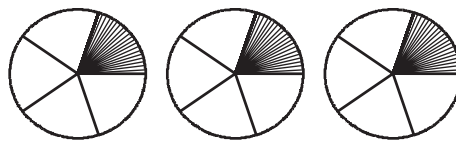
Neste caso, $\frac{a}{b} = a \div b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

De fato $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$

Então $\frac{3 \text{ pizzas}}{5 \text{ pessoas}}$ significa $3 \text{ pi} \overline{) 5 \text{ pe}}$ pois $\frac{3 \text{ pi}}{5 \text{ pe}} \cdot 5 \text{ pe} = 3 \text{ pi}$

$$0 \quad \frac{3 \text{ pi}}{5 \text{ pe}}$$

Geometricamente fica



Esta “personalidade” é chamada **quociente** e seu significado é percebido quando **um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos**. Ela aparece mais frequentemente nas aplicações do que as outras e se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão.

Esta “personalidade” está submetida à teoria da função quociente e, aqui, a barra fracionária é um símbolo para esta função,

$$x/y \equiv \text{quociente}(x, y), \text{ comumente escrito como } x \div y$$


em que o **dividendo** x e o **divisor** y simbolizam seus argumentos. Assim, ao indicar o quociente $\frac{3}{5}$ com a notação “barra fracionária”, reforça-se o fato de que em \mathbb{Q} todas as divisões têm resto zero. Ohlsson (1991) destaca que a teoria da função quociente se aplica à descrição de muitos fenômenos no mundo real, incluindo processos de partição, extração, encolhimento e dedução.

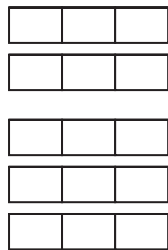
✓ Fração

Problema 3: Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R\$ 5,00 por sua parte. Que parte dos R\$ 5,00 recebeu Jô? E Pat?

Quando esse problema é apresentado aos alunos, após algum tempo dado para a sua resolução, pede-se, um a um, a resposta obtida. Com frequência a maioria responde que, dos R\$5,00, R\$3,00 vão para Jô e R\$2,00 para Pat. Isso reflete que a maioria das pessoas foi levada a reconhecer os números contidos no problema e buscar uma possível operação sobre eles. Nossa posição é questionar os resolvedores do problema: Que Matemática justificaria essas respostas?

Façamos uma representação pictórica da situação:

Seja  a representação de um sanduíche repartido igualmente entre as três meninas, onde $1 = \frac{3}{3}$.



Então, 5 sanduíches são iguais a $\frac{15}{3}$ de sanduíche.

Jô levou 3 sanduíches, portanto $\frac{9}{3}$ de sanduíche.

Pat levou 2 sanduíches, portanto $\frac{6}{3}$ de sanduíche.

Como as 15 partes foram divididas igualmente entre as 3 meninas, cada uma comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche. Então Jô comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e ofereceu à Cris $\frac{4}{3}$. Pat, por sua vez, comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e deu à Cris $\frac{1}{3}$. Como Cris pagou R\$ 5,00 por sua parte, ela pagou R\$ 1,00 por cada terço de sanduíche. Assim, a matemática mostra que Jô deve receber R\$4,00 e Pat R\$1,00.

Este problema apresenta um momento onde a função quociente aparece

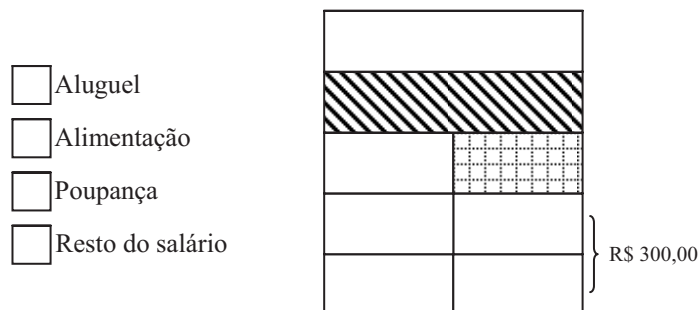
$$\begin{array}{r} 5 \text{ sand} \quad | \quad \frac{3 \text{ men}}{5 \text{ sand}} \\ 0 \quad \quad \quad \frac{3 \text{ men}}{5 \text{ sand}} \end{array}$$

Olhando o todo, 1 sanduíche, repartido em 3 partes, surge outra “personalidade” do número racional, a **fração**, que é uma **relação da parte com o todo**.

Na fração $\frac{5}{3}$, 3 é o **denominador**, indicando que o todo foi dividido em 3 partes iguais e dando nome a essa parte: $\frac{1}{3}$ (é lido *um terço*); 5 é o **numerador**, indicando que cinco dessas partes iguais foram tomadas: o número racional $\frac{5}{3}$ (é lido *cinco terços*). A barra fracionária, neste caso, funciona como um delimitador para o numerador e o denominador.

Problema 4: Do meu salário gastei $\frac{2}{5}$ com aluguel. Do que sobrou gastei metade com alimentação. Da segunda sobra coloquei $\frac{1}{3}$ na Poupança. Restaram-me R\$300,00. Qual é o valor do meu salário?

Utilizando uma **representação geométrica**:



Observe-se que, no problema 3, as partes se relacionavam sempre ao mesmo todo, enquanto que neste problema 4, cada parte relaciona-se a um todo diferente, a sobra de cada gasto. De qualquer modo, ambos referem-se a aplicações de fração, isto é, a relações de partes com o todo. Pela figura acima vê-se que o salário foi dividido em 10 partes iguais e que $\frac{2}{10}$ do salário correspondem a R\$300,00. Assim, $\frac{1}{10}$ vale R\$150,00 e o todo, $\frac{10}{10}$, o salário, é R\$1500,00.

Numa outra abordagem, este problema poderia ser visto assim:

$$1^{\circ} \text{ gasto} = \frac{2}{5} \text{ do salário}$$

$$1^{\text{a}} \text{ sobra} = \frac{5}{5} \text{ do salário} - \frac{2}{5} \text{ do salário} = \frac{3}{5} \text{ do salário}$$

$$2^{\circ} \text{ gasto} = \frac{1}{2} (1^{\text{a}} \text{ sobra}) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \text{ do salário} \right) = \frac{3}{10} \text{ do salário}$$

$$2^{\text{a}} \text{ sobra} = \text{do salário} - \text{do salário} = \text{do salário}$$

$$3^{\circ} \text{ gasto} = \frac{1}{3} (2^{\text{a}} \text{ sobra}) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} \text{ do salário} \right) = \frac{1}{10} \text{ do salário}$$

$$3^{\text{a}} \text{ sobra} = \frac{3}{10} \text{ do salário} - \frac{1}{10} \text{ do salário} = \frac{2}{10} \text{ do salário}$$

$$\text{Se a } 3^{\text{a}} \text{ sobra, } \frac{2}{10} \text{ do salário} = \text{R\$300,00} \text{ então } \frac{1}{10} \text{ do salário} =$$

$$\text{R\$150,00 e o salário todo será } \frac{10}{10} \text{ do salário} = \text{R\$1500,00.}$$

Algebricamente o problema pode ser resolvido montando-se uma equação. Seja x o meu salário. Então

$$x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}x \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}x \right) = \text{R\$300,00}$$

cujas solução é $x = \text{R\$1500,00}$.

Vale destacar que os **números decimais**: decimais exatas e dízimas periódicas simples e compostas são números racionais, pois podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Esses números não constituem, apesar de terem uma notação diferente, uma nova categoria de números, mas pertencem à mesma categoria das frações. Toda fração pode ser convertida a número decimal dividindo-se o numerador pelo denominador. A conversão de uma fração a uma decimal exata ocorre quando, em sua forma irredutível, o denominador tiver somente os fatores 2, 5, ou 2 e 5 (Por exemplo $\frac{5}{8} = 0,625$). Neste caso o número de casas decimais corresponde ao maior número de vezes que um desses fatores ocorre. Por outro lado a conversão de fração com denominadores cujos fatores sejam diferentes de 2 e 5, apresentará decimais não exatas que são dízimas periódicas simples (Exemplo: $\frac{4}{21} = 0,190476$). No caso em que os denominadores tenham os fatores 2 ou 5 e um outro fator as dízimas serão periódicas compostas (Exemplo: $\frac{8}{15} = 0,5\bar{3}$).

Considerando a multiplicação $a \times b = c$ como soma de parcelas iguais, isto é, $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ ou $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, onde a é o multiplicador (o que faz a ação) e b é o multiplicando (o que sofre a ação)

vem, em correspondência, $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{c}{b}, b \neq 0 \\ b = \frac{c}{a}, a \neq 0 \end{array} \right.$, que são operações diferentes. A

primeira é a divisão do produto pelo multiplicando e a segunda a divisão do produto pelo multiplicador.

Problema 5: Tenho 15 m de tecido.

(5.1) Quero cortá-lo em pedaços de 3 metros. (5.2) Quero cortá-lo em 5 partes iguais.

Qual é o resultado dessas ações? Qual é o significado de cada uma delas?

Efetuada as divisões, sugeridas pelas duas solicitações, encontramos:

(5.1)
$$15\text{m} \overline{) 3\text{m}}$$

$$0 \quad 5$$
 Neste caso a divisão é **quotitiva**, isto é, o todo foi dividido em cortes de 3 metros cada um e, como resultado, obtemos o número de partes, a **quota**. Isto reflete uma situação de fração,

$$\frac{15\text{m}}{3\text{m}} = 5,$$

uma relação parte todo.

(5.2)
$$15\text{m} \overline{) 5}$$

$$0 \quad 3\text{m}$$
 Neste caso a divisão é **partitiva**, isto é, o todo foi dividido em 5 partes iguais e, como resultado, foi obtido o tamanho da parte :

$$\frac{15\text{m}}{5} = 3\text{m}.$$

Isto reflete uma situação de **medida**.

✓ Operador


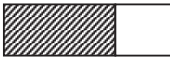

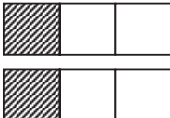
Na multiplicação $a \times b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{b}, b \neq 0 \\ b = \frac{c}{a}, a \neq 0 \end{cases}$, uma dificuldade para os

alunos se mostra quando o multiplicador se apresenta como um número racional. Por exemplo, como poderiam interpretar $\frac{3}{5} \times 15$? A notação barra fracionária $\frac{a}{b}$, neste caso, é usada para simbolizar uma classe particular de

funções compostas definida por $\frac{a}{b} \times x = a \times (x \div b) = (a \times x) \div b$, onde a e b são constantes e x é uma expressão numérica para alguma quantidade. A barra fracionária não é nem um símbolo funcional nem um delimitador, mas um símbolo para a operação de composição de funções. Então, $\frac{3}{5} \times 15$ deveria ser interpretado como uma função composta e, assim $\frac{3}{5} \times 15 = 3 \times (15 \div 5) = (3 \times 15) \div 5 = 3 \times 3 = 45 \div 5 = 9$.

Problema 6: Represente geometricamente $\frac{2}{3}$ de quatro maneiras diferentes.

Na multiplicação mn, onde m é o **multiplicador** e n o **multiplicando**, $\frac{2}{3}$ pode ser entendido:

- (a) $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ (duas vezes $\frac{1}{3}$) 
- (b) $\frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3}$ (uma vez $\frac{2}{3}$) 
- (c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$ ($\frac{2}{3}$ de 1) 
- (d) $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ ($\frac{1}{3}$ de 2) 

Cada um desses quatro casos constitui-se como uma situação diferente.

A “personalidade” **operador** tem significado semelhante ao de “encolher” ou “esticar”, de “reduzir” ou “ampliar”. No caso (a) anterior, o multiplicador 2 ampliou o multiplicando $\frac{1}{3}$ transformando-o em $\frac{2}{3}$. O **operador define uma estrutura multiplicativa** de números racionais.

✓ Razão

Problema 7: Duas jarras iguais contêm misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ (três para cinco), na primeira jarra e $\frac{3}{7}$ (três para sete) na segunda. Juntando-se os conteúdos das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

Neste problema é importante observar que as jarras comportam quantidades iguais, ou seja, o volume V_1 da jarra 1 é o mesmo que o da jarra 2 (V_2). Suponhamos, por sugestão da razão $\frac{3}{5}$, que este volume $V_1 = V_2 = V$ seja de 8l (poder-se ia supor qualquer outra quantidade).

Se $\frac{3}{7}$ é a razão da mistura na jarra 2, estes 8l são formados por 10 partes de 0,8l cada, das quais 3 partes = 2,4l são de álcool e 7 partes = 5,6l são de água.

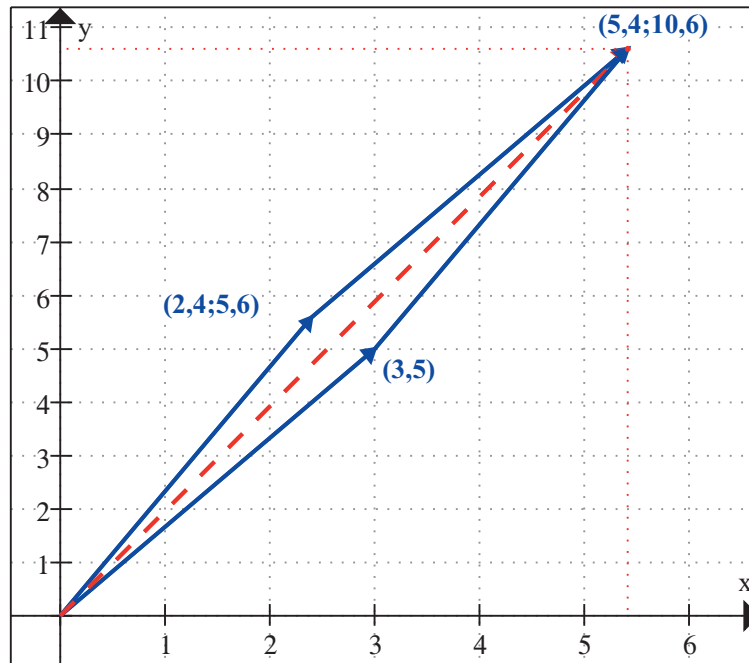
Assim, para a jarra 2, tem-se a razão $\frac{2,4l \text{ álcool}}{5,6l \text{ água}}$.

Se $V_1 + V_2 = 16l$, dos quais 5,4l são de álcool (3l da jarra 1 + 2,4l da jarra 2) e 10,6l são de água (5l da jarra 1 + 5,6l da jarra 2), a razão entre álcool e água na mistura final será $\frac{5,4l}{10,6l} = \frac{54}{106} = \frac{27}{53}$ ou, com outra notação para a razão, 27: 53.

Ohlsson (1991) afirma que a multiplicação, concebida como um produto cartesiano, mostra a razão como uma declividade vetorial e, assim, como vetores binários, razões podem ser adicionadas como pares ordenados:

$$(3; 5) + (2,4; 5,6) = (5,4; 10,6)$$

A figura abaixo mostra no plano cartesiano a adição das razões consideradas como os vetores (3;5) e (2,4;5,6), cuja resultante, obtida pela regra do paralelogramo, é a razão (ou vetor) (5,4;10,6):



Utilizando a notação “barra fracionária” esta expressão seria escrita:

$$\frac{3}{5} + \frac{2,4}{5,6} = \frac{5,4}{10,6} = \frac{27}{53}$$

Observe-se que esta adição não é realizada como adição de frações, onde o uso do mínimo múltiplo comum seria necessário. Nem poderia ser, uma vez que este número racional $\frac{27}{53}$, uma **razão**, foi obtido através da adição de razões.

Este problema foi discutido por Botta (1997, p.105), a partir dos estudos sobre razões e proporções realizados no artigo de autoria de Behr, Harel, Post e Lesh (1992). Botta (1997) afirma que “com frações realizamos todas as operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmação” (p.105). E questiona: “Que operações podemos fazer com razões?”. Razão é um número. Se razões são números, onde os localizamos na reta numerada, como fazemos com todos os tipos de números estudados?

Razão é uma **comparação multiplicativa entre duas grandezas**,

denotada por $\frac{a}{b} = a : b$ (*a está para b*), em que *a* é denominado **antecedente** e *b* é denominado **conseqüente**. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração.

O conceito de razão é relevante porque fundamenta o conceito de proporcionalidade, que é uma idéia unificadora na Matemática (EUA; 1992), pois é um conceito que “liga” diversos ramos da matemática escolar, como medida, estatística, aritmética, funções, álgebra e geometria. Da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regras de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, estimativas populacionais, variação direta, variação inversa, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, probabilidades, etc. O conceito de proporcionalidade está presente não apenas na Matemática, mas, também, em outras áreas do conhecimento. Em Física, no estudo da densidade, da ótica, da velocidade; em Química, no estudo de equivalências químicas; em Artes, na ampliação e redução de figuras; em Geografia, na interpretação das escalas de mapas;...

✓ Proporcionalidade

Problemas 8:

(8a) Teresa e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a nona volta, Júlia acabara a terceira. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas havia dado Teresa?

(8b) Se com 3 dólares podiam-se comprar duas libras esterlinas, quantas libras se poderiam adquirir com 21 dólares?

No problema (8a), um dado essencial é que as atletas correm à mesma velocidade. Assim, a partir da terceira volta de Júlia, onde a diferença entre elas era de 6 voltas, essa diferença se mantém nas demais voltas. Assim, quando Júlia tiver terminado 15 voltas, Teresa terá terminado 21 voltas. A comparação entre essas duas grandezas é aditiva, não se configurando, portanto, uma situação de proporcionalidade.

No problema (8b), porém, é nítida a comparação multiplicativa existente entre as duas grandezas, dólares e libras. Logo, há proporcionalidade e é legítimo escrever $\frac{2}{3} = \frac{x}{21}$.

Vale, então, o produto cruzado e

$$2 \cdot 21 = 3x \Rightarrow 42 = 3x \Rightarrow x = 14$$

Numa primeira leitura, os dois problemas podem parecer semelhantes. Em ambos há três dados conhecidos e um desconhecido. Sua estrutura parece conduzir a uma proporção mas, como vimos, há uma diferença profunda entre eles.

Em cursos e oficinas de trabalho para a formação de professores e mesmo para estudantes, em sala de aula, quando propostos propositadamente os dois problemas, simultaneamente, constata-se com freqüência que, para a questão (8a), os resolvidores fazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Teresa acabou a } 9^{\text{a}} \text{ volta} \\ \text{Júlia acabou a } 3^{\text{a}} \text{ volta} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{A cada volta de Júlia correspondem} \\ \text{3 voltas de Teresa.} \end{array} \right.$$

assumiram a comparação multiplicativa e utilizaram a idéia de proporcionalidade fazendo

$$\frac{9}{3} = \frac{x}{15}.$$

Afinal, eles tinham três quantidades conhecidas e uma desconhecida e, fazendo o produto cruzado, chegaram a

$$135 = 3x \quad \text{e} \quad x = 45,$$

não percebendo que, com essa condição, ao completar 15 voltas, Júlia teria acrescentado 12 voltas ao seu percurso, enquanto que Teresa teria acrescentado $12 \times 3 = 36$ voltas às 9 voltas já percorridas, totalizando 45. Nesta questão não há proporcionalidade pois a comparação entre as grandezas é aditiva.

Já na questão (8b) há proporcionalidade, a comparação é multiplicativa.

O fato de que muitos aspectos de nosso mundo operam de acordo com regras proporcionais torna as habilidades de raciocínio proporcional

extremamente úteis na interpretação dos fenômenos (POST; BEHR; LESH; 1994). Entretanto, a aquisição de tais habilidades na população em massa, não somente tem sido insatisfatória, mas há evidências de que um grande segmento da sociedade nunca as adquire.

Fazer operações mecânicas com proporções não significa necessariamente compreender as idéias subjacentes ao pensamento proporcional. A compreensão de proporcionalidade é um ponto crítico no desenvolvimento mental. O raciocínio proporcional tem sido considerado como ponto crucial do ensino elementar e a pedra angular da álgebra e do que vem depois (LESH, POST, BEHR, 1991). A habilidade em raciocinar proporcionalmente foi uma marca da distinção de Piaget entre os níveis de pensamento concreto e operacional formal. (VAN DE WALLE, 2006)

Considerações finais

Nosso objetivo, neste trabalho, é o de apresentar e analisar as diferentes “personalidades” dos números racionais, assim como o conceito de proporcionalidade. Para isso, sugerimos que esses conceitos sejam trabalhados, em sala de aula, a partir de problemas geradores. Acreditamos que, utilizando a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a construção de conhecimentos relacionados a esses conceitos se realize de forma mais significativa e efetiva pelos alunos.

Nossas experiências, em oficinas de formação de professores em que esta forma de trabalho foi implementada, têm mostrado que as diferentes “personalidades” dos números racionais muitas vezes são desconhecidas, ou mal compreendidas, ou ignoradas ou trabalhadas apenas superficialmente em sala de aula. Não raro, razões são consideradas como frações, uma vez que, a partir de seu símbolo, a notação barra fracionária, induzem a um tratamento semelhante. É necessário que se tenha um real conhecimento e que se reflita cuidadosamente sobre suas diferenças.

Não se trata de apresentar nomes (ponto racional, quociente, fração, operador, razão), muito embora a nomenclatura matemática seja, em muitos casos, de extrema relevância. O fundamental é permitir que os alunos

desenvolvam compreensões sobre estes conceitos, dando-se-lhes a oportunidade de encontrar os diferentes significados dentro de uma variedade de problemas. Na terceira seção, notamos vários desses significados nas respostas dos alunos à questão da professora: “O que vocês podem me dizer a respeito de $\frac{2}{5}$?”

Em particular, as proporções estão presentes em muitas situações do dia-a-dia e do mundo. Curcio e Bezuk (1994) afirmam: “As soluções de muitos problemas envolvendo medidas, geometria, álgebra, probabilidade e estatística requerem o conhecimento de, e a facilidade com, números racionais e proporções” (p.2).

A natureza do número muda enquanto nos movemos de “adicionar e subtrair” para “multiplicar e dividir” números inteiros; e muda, mais ainda, quando passamos das operações com inteiros para as operações com números racionais.

Os estudos já realizados nesta linha mostram que não há consenso absoluto sobre quais são as “personalidades” dos números racionais (BOTTA, 1997). Porém, todos concordam que a exploração desse conhecimento construído com os alunos leva tempo. É preciso que nos conscientizemos da importância de um trabalho sério com números racionais e proporcionalidade, que leve à consolidação de conhecimento essencial, tanto conceitual quanto procedimental.

Referências

ALLEVATO, N.S.G. Trabalhando com Padrões e Introduzindo Conteúdos Matemáticos através da Resolução de Problemas. In: EEMAT, 4., 2006, Macaé. **Anais do IV Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro**. Macaé: SBEM-RJ, 2006.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Number, Ratio and Proportion. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. p.296-333.

BOTTA, L.S. **Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre ensino-aprendizagem**. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UNESP, Rio Claro, 1997.

CURCIO, F.R.; BEZUK, N.S. Understanding rational numbers and proportions. In: **Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda séries**. Grades 5-8. Reston: NCTM, 1994.

EUA. Department of Education. **Mathematics Framework for California Public School**. Sacramento, California: Department of Education, 1992.

HIEBERT, J.; BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3 ed. Reston: NCTM, 1991. p.1-18.

LESH, R., POST, T., BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3. ed. Reston: NCTM, 1991. p. 93-118.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades**. 3.ed. Reston: NCTM. 1991. p.53-92.

ONUCHIC, L.R. A Resolução de Problemas e o trabalho de ensino-aprendizagem na construção dos números e das operações definidas sobre eles In: ENEM, 8., 2004, Recife. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: UFP, 2004.

ONUCHIC, L.R.; BOTTA, L.S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática – SBEM-SP**, São José do Rio Preto/SP, ano 5, n.3, p.5-8. 1997.

ONUCHIC, L.R.; BOTTA, L.S. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática – SBEM-SP**, São José do Rio Preto/SP, ano 6, n.4, p.19-26. 1998.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (Org). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

POST, T.R.; BEHR, M.J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções de pré-álgebra. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P.(Org.). **As idéias da álgebra**. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 89-103.

REYS, B.; BARGER, R. et al. **Developing Number Sense in the Middle Grades**. Reston: NCTM, 1994.

VAN DE WALLE, J.A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, ed.4, 2001.

VAN DE WALLE, J.A.; LOVIN, H.L. **Teaching Student-Centered Mathematics**. New York: Pearson, 2006.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. 3. ed. Reston: NCTM, 1991. p. 141-161.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual Field. What and Why? In: HAREL, G. & CONFREY, G. (Eds.). **The development of Multiplicative Reasoning in the learning of Mathematics**. NY: Suny Press. 1994. p. 4-41.

Aprovado em outubro de 2007

Submetido em abril de 2007