Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 97 a 126, abril 2011 *ISSN 0103-636X*

Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal

Algebraic Thinking through the Basic Education in Portugal

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino[1]
Hélia Margarida de Oliveira[2]

Resumo

Nesta investigação identificamos as estratégias e os tipos de pensamento algébrico mobilizados por três alunos de diferentes ciclos do Ensino Básico na execução de um mesmo conjunto de tarefas. O objetivo foi o de relacionar os tipos de pensamento algébrico mobilizados e os objetivos de aprendizagem presentes nos documentos oficiais de orientação curricular vigentes em Portugal, tendo em conta o nível de escolaridade dos alunos. A recolha de dados foi realizada numa escola da região de Lisboa por meio da aplicação, acompanhada de entrevista, de quatro tarefas. Organizamos os tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos em função de três grandes categorias, nomeadamente Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional e Modelação, e de subcategorias que emergiram no decorrer da análise. Este estudo sugere que alunos de diferentes níveis de escolaridade mobilizam diversos tipos de pensamento algébrico, embora apresentem estratégias de resolução semelhantes.

Palavras-chave: Pensamento Algébrico. Estratégias. Tipos de Pensamento Algébrico.

[1] Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo/USP. Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Endereço para correspondência: Rua Prof. Samuel Moura 328 apto 1604. Londrina – PR. CEP: 86061-060. E-mail: marciacyrino@uel.br.

[2] Doutora em Educação (especialidade de Didática da Matemática) pela Universidade de Lisboa. Professora do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa; Centro de Investigação em Educação da UL, Campo Grande /Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Rua da Pinta, 8, 2640-564 Mafra, Portugal. E-mail: hmoliveira@ie.ul.pt.

Abstract

In this research we identify strategies and types of algebraic thinking used by three students of different levels of Basic School Level in carrying out of same set of tasks. The goal was to relate the types of algebraic thinking used with the learning aims presented in the official documents of Portuguese Curricular Orientation but without forgetting the students' levels. The process of collecting data was done in a school in Lisbon through the application of four tasks accompanied by interviews. We organized the types of algebraic thinking expressed by the students in three main categories: Generalized Arithmetic, Functional Thinking and Modelling, and also in subcategories which emerged during the process of data analysis. This research suggests that students from different school grades used different types of algebraic thinking in spite of using similar resolution strategies.

Keywords: Algebraic Thinking. Strategies. Types of Algebraic Thinking.

1. Introdução

O reconhecimento do lugar central da álgebra na Matemática tem sido acompanhado pela sua integração nos currículos do ensino básico ao redor do mundo. No entanto, são reconhecidas muitas dificuldades associadas à aprendizagem da álgebra, suscitando, por exemplo, a reflexão e o debate sobre quando iniciar o seu estudo e, de uma forma mais geral, sobre a sua própria natureza (JACOBS et al., 2007). Concomitantemente, a investigação sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra na educação elementar tem mobilizado muitos educadores matemáticos nos últimos anos, sendo vários os focos assumidos nos estudos. Kieran (2006) apresenta três grandes grupos de temas que emergiram nas actas do grupo PME (*Psychology of Mathematics Education*) nos últimos 30 anos, nomeadamente: a) transição da aritmética para a álgebra, variáveis e incógnitas, equações e resolução de equações, e problemas de palavras em álgebra; b) uso de ferramentas tecnológicas, focando-se nas múltiplas representações e na generalização; c) pensamento algébrico dos alunos do ensino elementar, focando-se no ensino/aprendizagem da álgebra, nos modelos dinâmicos de situações físicas e noutros ambientes dinâmicos da álgebra.

Estes temas, segundo Kieran (2007), estão associados à discussão da origem dos significados no ensino da álgebra: 1) significado interno à matemática: a) da sua estrutura algébrica; b) de múltiplas representações; 2) significado no contexto de problemas; 3) significado derivado do que é externo à matemática no contexto de problemas (por exemplo, atividade linguística, gestos e material de linguagem, metáforas, experiências vividas, construção de imagens, etc.).

De acordo com Arcavi (2006) parece existir um amplo acordo de que construímos e reconstruímos significados de modo idiossincrático cada vez que aprendemos ou manejamos ideias, e que observar e procurar entender esses processos pode fornecer-nos informações importantes sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra.

Na presente investigação identificamos as estratégias e os tipos de pensamento algébrico mobilizados por três alunos de diferentes ciclos do Ensino Básico na execução de um mesmo conjunto de tarefas matemáticas. Com esse propósito, assumimos os modos de produzir significados para a álgebra discutidos por Lins (1992, 1994) e por Blanton e Kaput (2005). Adicionalmente, analisamos as relações entre estes tipos de pensamento algébrico evidenciados pelos alunos e os objetivos de aprendizagem presentes nos documentos oficiais de orientação curricular vigentes em Portugal, tendo em conta o seu nível de escolaridade.

A álgebra no ensino básico em Portugal

Até há pouco tempo, em Portugal existia uma reduzida reflexão sobre o papel da Álgebra no currículo e sobre as razões para o fraco desempenho dos alunos neste domínio (PONTE, 2006). Nos programas do ensino básico em vigor (PORTUGAL, 1991a) verifica-se uma secundarização da Álgebra, na medida em que esta surge integrada no tema de Números e Cálculo e denota-se um claro predomínio de uma visão procedimental deste domínio, com reduzida atenção aos aspectos conceituais deste campo. De fato, as expressões com variáveis e a resolução de equações do 1.º grau simples são o ponto de entrada habitual dos nossos alunos na Álgebra a partir do 7.º ano. Já no Currículo Nacional (PORTUGAL, 2001) para o ensino básico a Álgebra ganha maior visibilidade como grande tema curricular, no entanto, aparentemente este documento tem tido pouco impacto nas práticas de sala de aula (PONTE, 2006).

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (com implementação a partir de 2010) apresenta o pensamento algébrico como um dos quatro eixos fundamentais em torno dos quais se deve desenvolver os processos de ensino e de aprendizagem (PORTUGAL, 2007). Neste programa, a Álgebra é introduzida como tema programático nos 2º e 3º ciclos, e no 1º ciclo tem já lugar uma iniciação ao pensamento algébrico. Os autores consideram mesmo que, no domínio da Álgebra, este novo programa se distingue principalmente do anterior pelo fato de estabelecer: "um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos" (PORTUGAL, 2007, p. 7).

Um conjunto de investigações recentes no nosso país têm procurado pôr em prática algumas das orientações curriculares assumidas em diversos estudos nesta área, das quais se aproximam as orientações do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, evidenciando resultados positivos quanto ao desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos no 2.º e 3.º ciclos do ensino básico (ALVARENGA; VALE, 2007; BRANCO, 2008; MATOS; PONTE, 2008; SANTOS, 2008). No entanto, estes estudos foram realizados ainda num número reduzido de turmas, não permitindo ter uma panorâmica mais geral sobre esta problemática.

Caracterização do pensamento algébrico

Desde a década de 1980 inúmeros estudos têm-se focado no modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébricos e, nos últimos anos, têm surgido diversas caracterizações para os modos de produzir significados para os objetos e processos da álgebra (KAPUT, 1999; LINS, 1992, 1994; KIERAN, 2007; LINS; KAPUT, 2004; BLANTON; KAPUT, 2005; MOURA; SOUZA, 2005; CARRAHER; SCHLIEMANN et. al., 2006) fazendo uso de diferentes termos. De entre estes, destacam-se o pensamento algébrico, a atividade algébrica e o raciocínio algébrico. Para Radford (2006, p. 2) se ainda não temos uma definição precisa para Pensamento Algébrico, isso se deve ao "extenso escopo de objectos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral".

Apresentamos a seguir os modos de produzir significados para a álgebra discutidos por Lins (1992, 1994), Lins e Kaput (2004), e por Blanton e Kaput (2005) por demonstrarem preocupação com a necessidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, desde os primeiros anos de escolaridade, e de procurar perceber as estratégias dos alunos, de forma a dar conta da sua complexidade.

Para Lins (1992, 1994) o pensamento algébrico é um modo, entre outros, de *produzir significado* para a álgebra. Pensar algebricamente é para este autor: (i) pensar aritmeticamente; (ii) pensar internamente; (iii) pensar analiticamente (LINS, 1992).

Pensar aritmeticamente significa que os objetos com os quais se está a trabalhar são exclusivamente números, operações aritméticas e uma relação de igualdade (LINS, 1994). Nesta perspectiva, é no bojo da linguagem aritmética que o pensamento algébrico emerge nas suas primeiras características.

O *pensar internamente* implica considerar os números e as operações apenas segundo as suas propriedades, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade (LINS, 1992). As propriedades destes objetos, que sustentam a ação dos alunos, não fazem referência a coisa alguma fora do domínio desses objetos (LINS, 1994). Esta segunda característica do pensamento algébrico, o internalismo, foca-se na "possibilidade que temos de distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas" (LINS, 1992, p. 14).

O *pensar analiticamente* caracteriza o pensamento algébrico "como um método de procura das verdades onde o desconhecido é tratado como conhecido" (LINS, 1992, p.16). Significa que os números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos e as "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados" (LINS, 1994).

Lins e Kaput (2004), após efetuarem uma análise sobre o emprego da expressão *educação algébrica*, concordam provisoriamente com duas caracterizações para o pensamento algébrico. A primeira "envolve o acto de generalização deliberada e a expressão de generalidades", e a segunda "envolve, usualmente como um comportamento separado, um raciocínio baseado em formas de generalizações sintaticamente-estruturadas, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente" (LINS; KAPUT, 2004, p. 48). As ações guiadas semanticamente propiciam uma busca de significados, em todos os sentidos do termo, para o processo de generalização, enquanto que nas ações guiadas sintaticamente há uma preocupação com o processo de formalização.

Os autores consideram que esta caracterização, de natureza ampla, do raciocínio algébrico pode ajudar-nos a discutir formas de pensamento algébrico apropriadas às crianças pequenas e as condições para as promover. De entre estas condições destacam a integração de diferentes tópicos da matemática (aritmética, geometria, tratamento da informação, por exemplo), a fim de promover o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico, que possibilitariam aos alunos uma melhor capacidade de resolução de problemas.

Preocupados também com o desenvolvimento do raciocínio algébrico de crianças, nas séries iniciais do período de escolarização, Blanton e Kaput (2005, p. 413) o definem como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade".

Dependendo do nível de experiência dos alunos, estas generalizações podem ser expressas por palavras ou por símbolos, baseados na observação de padrões ou em relações funcionais. Estes autores defendem que o raciocínio algébrico pode assumir várias formas, incluindo:

> a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
> b) a generalização de padrões numéricos para descrever

> relações funcionais (pensamento funcional);
> c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
> d) a generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Para estes autores, a primeira forma apresentada refere-se ao raciocínio sobre as operações e as propriedades associadas aos números, como por exemplo, generalizações sobre a propriedade comutativa da multiplicação, ou ainda, o reconhecimento da igualdade como uma relação entre quantidades. O pensamento funcional envolve a exploração e a expressão de regularidades numéricas, como por exemplo, a descrição do crescimento de padrões ou generalizações sobre somas de números consecutivos. A modelação envolve a generalização a partir de situações matematizadas ou de fenômenos, como por exemplo a generalização de regularidades em situações do dia-a-dia onde a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa. Por fim, a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações, uma forma de raciocínio algébrico menos comum no currículo do ensino básico, envolve a generalização utilizando objetos abstratos e operações sobre classes de objetos.

Consideramos que nas perspectivas de Lins (1992, 1994) e de Lins e Kaput (2004) não há ênfase na linguagem formal (manipulação de símbolos), mas nas formas de pensamento e no processo de produção de significados dos alunos. Este fato traz implicações importantes para a sala de aula, nomeadamente pelo fato de olharmos para o pensamento algébrico como um modo de atribuir significados para a matemática ou de refletir matematicamente (RADFORD, 2006), tão importante quanto o pensamento geométrico ou combinatório. Blanton e Kaput (2005) descrevem o desenvolvimento do raciocínio algébrico, como um todo, enfatizando todo o processo da atividade algébrica, desde as primeiras características do pensamento algébrico até à utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer generalizações.

Neste trabalho utilizamos o termo *Pensamento Algébrico* como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos.

Metodologia

O presente estudo é de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, pois visamos compreender dados de natureza qualitativa (as resoluções e estratégias dos alunos), procurando recolher dados sobre as interpretações dos alunos sobre as tarefas matemáticas propostas e as suas explicações dos processos que utilizaram na resolução das mesmas. A recolha dos dados foi efetuada em uma escola portuguesa[3], com um aluno do último ano de cada ciclo do Ensino Básico, ou seja, do 4.º, 6.º e 9.º ano, com cerca de 9, 11 e 14 anos de idade, respectivamente. Estes alunos frequentam o Clube de Matemática que é um espaço extra-curricular orientado por professores de Matemática no qual os alunos que têm motivação para a matemática resolvem e discutem tarefas matemáticas. Os alunos envolvidos no estudo foram sugeridos pelo professor responsável pelo Clube, por revelarem uma boa capacidade de comunicação, disponibilidade para colaborar com a investigação, e bom desempenho no desenvolvimento de tarefas matemáticas.

Cada um dos três alunos foi entrevistado individualmente durante a execução de quatro tarefas (anexo), nas instalações da escola, seguindo o método de entrevista clínica (HUNTING, 1997). As tarefas foram escolhidas de modo que pudéssemos identificar alguns aspectos centrais do pensamento algébrico, independentes do nível de escolaridade dos alunos. A realização das tarefas pelos alunos, em conjunto com a entrevista, teve uma duração média de 30 minutos. Solicitamos que, durante a resolução de cada tarefa, o aluno fosse descrevendo o que estava a pensar, com o objetivo de perceber como tinha interpretado a tarefa, que formas de raciocínio e conhecimentos matemáticos estava a mobilizar, e as estratégias que estava a utilizar. Com esse objetivo, as questões que faziam parte do guião eram do tipo: "*Podes dizer como estás a pensar? Podes dizer como chegaste a essa solução? Por que pensaste assim? Gostaria de perceber como pensaste. Se fosses explicar a um colega, como farias?*"

Na fase da entrevista, para que pudéssemos obter mais informações sobre os tipos de pensamento algébrico que os alunos estavam a mobilizar,

[3] Agradecemos as professoras Hermínia de Sousa e Sandra Pinheiro pela colaboração na coleta de algumas informações e primeiras análises.

propomos outras questões elaboradas a partir das ações de cada aluno, além daquelas que compunham o conjunto das tarefas propostas e o guião da entrevista. Por exemplo, com o objetivo de verificar se o aluno era capaz de reconhecer a existência de outras formas de generalização equivalente à sua, após a resolução da tarefa 3-item C (anexo), apresentamos-lhe, por escrito, uma estratégia equivalente à que o aluno havia delineado e colocamos-lhe a questão: "Um outro aluno respondeu, a esta questão, da seguinte forma… (entregamos o papel para que ele lesse). Está correto? Porquê?". Neste sentido, levamos para entrevista uma série de possibilidades de respostas (expressões algébricas ou estratégias equivalentes) escritas em "tiras de papel" para que tivéssemos flexibilidade para apresentá-las aos alunos tendo em conta o seu desempenho até ali.

O discurso dos alunos e as questões por nós colocadas foram áudio-gravados e, posteriormente, transcritos para efetivação da análise que se iniciou, informalmente, no momento da recolha dos dados à medida que os alunos resolviam as tarefas propostas. Após a recolha dos dados iniciamos uma análise mais sistemática.

No decorrer da análise dos dados provenientes das entrevistas, procuramos valorizar mais as estratégias de resolução e as reflexões promovidas no decurso da entrevista do que o resultado final obtido pelo aluno na resolução da tarefa. Mais especificamente, para identificar os tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos realizamos uma análise descritiva da produção escrita de cada aluno e das conversações que ocorreram durante a entrevista, tendo como referência as caracterizações descritas na seção anterior. Esta análise permitiu-nos uma percepção do desempenho relativo de cada aluno, de acordo com seu nível de escolaridade, para que pudéssemos, em seguida, analisar as relações desse desempenho com os objetivos de aprendizagem presentes nos documentos oficiais de orientação curricular vigentes em Portugal.

Estratégias e tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos

Apresentamos a seguir as categorias e subcategorias que emergiram durante a análise que revelam os tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos na resolução das tarefas propostas. O texto está organizado em função de três grandes categorias, nomeadamente Aritmética Generalizada, Pensamento Funcional e Modelação, e foi construído a partir das estratégias utilizadas pelos alunos de modo a evidenciar a ocorrência de nossa codificação. No final da seção exibimos um quadro síntese com os tipos de pensamento algébrico identificados.

Aritmética Generalizada

Algumas estratégias utilizadas pelos alunos dos três níveis de escolaridade revelam o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (BLANTON; KAPUT, 2005).

Na resolução da tarefa 1, foi possível verificar que o aluno do 4.º ano **explora propriedades das operações com números**, pois estabeleceu um pensamento relacional, baseado em propriedades estruturais de operações aritméticas, nomeadamente as **propriedades associativa e comutativa da multiplicação**. Ele observou a equação  $= 2 \times 2 \times 3 \times 3$, relacionou os seus elementos e utilizou conhecimento aritmético para determinar o valor desconhecido.

> *"Este 2 (aponta para o primeiro 2 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a primeira borboleta) e este 2 (aponta para o segundo 2 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a segunda borboleta). Este 3 (aponta para o primeiro 3 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a primeira borboleta), e este 3 (aponta para o segundo 3 da expressão 2x2x3x3) vem para esta (aponta para a segundo borboleta)" (Aluno do 4º ano).*

Podemos afirmar que ele **estabelece uma relação de identidade**, quando reconhece que as borboletas representam o mesmo valor; **explora a igualdade como uma relação entre quantidades,** e **resolve uma sentença com números desconhecidos** ao encontrar o valor representado pela borboleta. Este aluno não demonstrou dependência da realização das operações contidas na expressão para resolução da tarefa 1.

O aluno do 9.º ano demonstrou ter o mesmo tipo de pensamento descrito no parágrafo anterior, porém utilizou uma estratégia diferente. Calculou o valor da expressão numérica 2x2x3x3, estabeleceu uma relação de equivalência entre este valor (36) e o termo desconhecido (como tinha duas borboletas procurou um número que vezes ele mesmo dá 36), e comparou o resultado encontrado (6) com as alternativas apresentadas. Ou seja, efetuou corretamente a multiplicação, em seguida determinou o valor desconhecido e verificou, de entre as alternativas apresentadas, aquela que era equivalente a este valor.

> *"Eu acho que é o C, porque eu multipliquei esses dois números (aponta para o 2x2) e tenho 4, e tenho... e tenho dois três. Três vezes 3 que dá 9. Quatro vezes nove dá 36. Cada borboleta... eu substitui por 2 vezes 3 que dá 6. Vou ter que 6 vezes 6 é 36" (Aluno do 9.º ano).*

Podemos conjeturar que, após os cálculos, o aluno tomou consciência da estrutura e da composição da expressão, ao indicar com a caneta 2x3 na expressão 2x2x3x3 para a 1ª e para a 2ª borboleta.

O aluno do 6.º ano disse que a alternativa correta era a C e justificou explicando: "*Porque é 2x2, talvez o 2 equivalesse a esta borboleta* (apontou para a 1ª borboleta), *e 3x3, talvez este 3 equivalesse a esta borboleta* (apontou para a 2ª borboleta). *É a resposta C*", e escreveu (ver Figura 1):

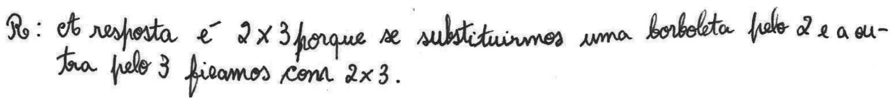

R: A resposta é 2x3 porque se substituirmos uma borboleta pelo 2 e a outra pelo 3 ficamos com 2x3.

Figura 1: Resposta do aluno do 6º ano para a tarefa 1.

Inferimos que este aluno, apesar de ter assinalado a alternativa C como resposta correta, atribuiu valores diferentes para cada borboleta (para a primeira borboleta 2 e para a segunda 3), ou seja, não estabeleceu a relação de identidade entre elas.

Na tarefa 2 os três alunos resolvem corretamente a questão proposta recorrendo ao cálculo e à experimentação de alguns números para encontrar os valores dos símbolos que tornassem as sentenças verdadeiras. Por exemplo, o aluno do 6.º ano escreveu:

R: O algarismo representado por ^ é 9 porque o @ equivale a 1 e @+@+@ = 3 = *, o # equivale a 2 e #+#+# = 6 = & e 3+6 = 9.

Figura 2: Resposta do aluno do 6º ano para a tarefa 2.

Todos os alunos estabeleceram algumas hipóteses iniciais e **exploraram propriedades e relações entre os números**.

O aluno do 4º ano, antes de iniciar a experimentação, escreveu:

* = @ + @ + @

* > @

Figura 3: Resposta do aluno do 4º ano para a tarefa 2.

O aluno do 6.º ano disse: *Estou a pensar num número que seja menor do que 5 que dê este número (apontou para o *). E depois quando formos somar a este (apontou para &), o * , o outro (^) dê um número menor que 10.*

Terminada a primeira leitura da tarefa, o aluno do 9.º ano disse que "tinha dúvidas" porque não sabia qual era o algarismo que poderia substituir o ^, mas que tinha certeza que não era o 0 e nem o 2. Após nos questionar se o ^ não poderia ser um número com mais de um algarismo e experimentar alguns números, o aluno diz: *Se aqui for 1* (aponta para o #) *vai ficar 3. Se este* (@) *for 2, vou começar com número mais pequeno... Se for 2 vai dar 6. Seis mais 3 é igual a 9. E como estes números têm que ser os mais pequenos possíveis... Os outros três não vão poder ser...* (aponta para o 0, 2 e 6).

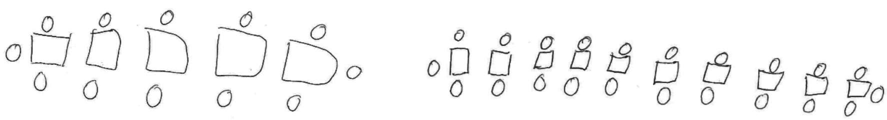
Estas hipóteses iniciais baseiam-se no reconhecimento, por parte dos alunos, da **magnitude dos números** e revelam um ***pensar analiticamente***.

No entanto, através da resolução desta tarefa, não foi possível perceber se os alunos reconheceram que a soma de dois números múltiplos de 3 também é um número múltiplo de 3. Deste modo propusemos-lhes outra situação: "*Se cada símbolo representasse um número qualquer, o valor de ^ poderia ser 15? Por quê? Poderia ser 22? Por quê?*".

O aluno do 4.º ano, em um primeiro momento, afirmou que o ^ não poderia ser 15 ou 22, e justificou: *"Porque a unidade tem que ser 9! Só pode ser 19, 29, 39 e assim…"*. Inferimos que ele tenha respondido deste modo pelo fato de, para um algarismo, a resposta ter sido 9 e, portanto, para um número constituído por mais de um algarismo, o algarismo das unidades teria que ser também 9. Ao ser questionado do porquê do ^ poder ser 19, realizou alguns cálculos e mudou a sua resposta. Embora tenha respondido corretamente, demonstrou dependência da realização de cálculos para resolver a nova tarefa.

Os alunos do 6.º e 9.º anos, para responderem quanto à possibilidade do ^ ser 15, efetuaram alguns cálculos e disseram que era possível. Quanto ao 22, apesar de recorrerem à experimentação, ambos **demonstraram reconhecer que a soma de três parcelas iguais é um múltiplo de 3**. Porém, nada se pode dizer quanto à compreensão ou não de que a soma de dois números múltiplos de 3 também é um número múltiplo de 3. O aluno do 6.º ano disse "*2+2+2=6 e o número que somado com esse que dá 22 é o 16, e não há nenhum número que multiplicado por 3 dê 16"*. E o aluno do 9º ano justificou com o seguinte argumento: "*Se for 5. Cinco, cinco, cinco dá 15. Não há meio de ter três números iguais… Um número vezes 3 que vai dar 7, para chegar no 22"*. Os argumentos utilizados revelam que estes dois alunos **tratam o número algebricamente,** conhecem algumas propriedades da estrutura aditiva e multiplicativa, nomeadamente magnitude, complementaridade e composição/decomposição.

Na resolução da tarefa 3, o aluno do 4.º ano utilizou a contagem, apoiada na construção de esquemas, como estratégia de resolução dos itens A e B.



Item A Item B

Figura 4: Resposta do aluno do 4º ano para os itens A e B da tarefa 3.

Para determinar a quantidade de cadeiras para a Mesa 20, representou apenas 10 mesas e explicou: *"Vai dar 42! Porque 20+20 dá 40. Mais dois de cada lado dá 42"*. Este aluno **expressa um raciocínio aditivo**, demonstra ter ideia de proporcionalidade ainda de natureza aditiva. Não foi capaz de produzir uma generalização para esta situação, permanecendo no domínio da aritmética. Após ler pausadamente, por duas vezes, o que era pedido no item C respondeu que tinha 4 cadeiras. Como estava escrito *"Quantas cadeiras terá uma mesa qualquer deste tipo?"* inferimos que ele interpretou que o enunciado pedia quantas cadeiras terá uma mesa, ou seja, a mesa 1.

O aluno do 6.º ano utilizou, inicialmente, um raciocínio recursivo e depois um **raciocínio multiplicativo** para resolver a tarefa. Como justificação da sua resolução do item A, disse: *"Porque se a mesa 1 tem 4, a 2 tem 6, é sempre de 2 em 2. E do 2 ao 5 vão 3 mesas. [...] A mesa 5 tem 12 cadeiras"*. Em relação à resolução do item B, afirma: *"Da mesa 5 até à mesa 20 são 15 mesas e em cada mesa vão ser sempre mais duas cadeiras, por isso basta fazer 2x15=30 e depois adicionar 12 a 30 que dá 42"*.

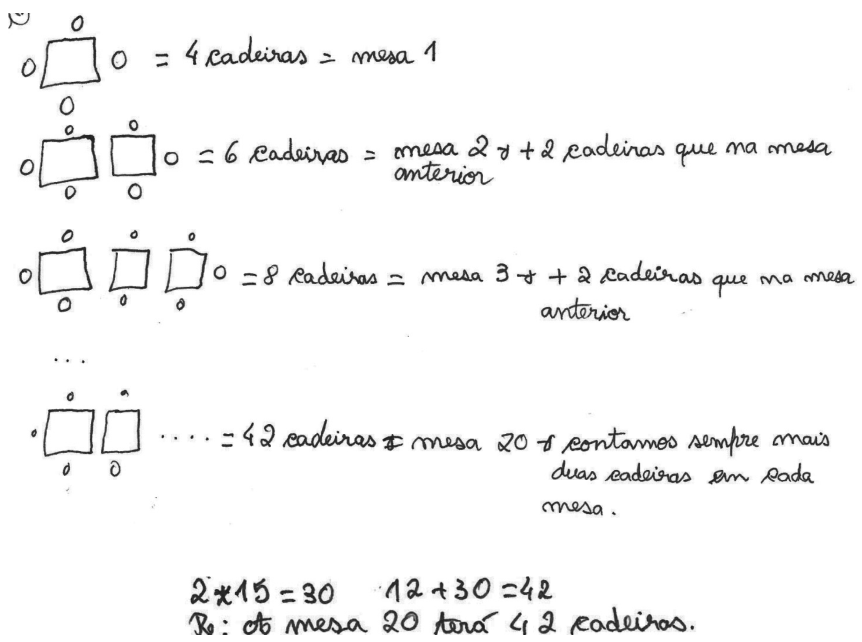


Figura 5: Resposta do aluno do 6º ano para os itens B e C da tarefa 3.

Pensamento funcional

Nas estratégias dos alunos, relatadas a seguir, analisamos os tipos de pensamento algébrico em que se evidenciam algumas relações funcionais mobilizadas para generalizar o padrão proposto na tarefa 3.

Os alunos do 4.º e 6.º anos **prevêem condições desconhecidas a partir de dados conhecidos, como se evidencia** nas estratégias relatadas na secção anterior.

Para o item C da tarefa 3, o aluno do 6.º ano, após a primeira leitura, revelou uma compreensão semelhante à do aluno do 4.º ano. Ao ser esclarecido que poderia ser uma mesa do tipo 1, ou 2, ou 3, escreveu:

Figura 6: Resposta do aluno do 6º ano para o item C da tarefa 3.

Por meio desta afirmação verificamos que ele, na tentativa de explicitar uma lei de formação, **encontra uma relação funcional recursiva**, e **identifica e descreve um padrão numérico**.

O aluno do 9.º ano demonstrou a mobilização de um raciocínio funcional desde o início da exploração desta tarefa. Ao ser questionado sobre o porquê da mesa 5 ter 12 cadeiras disse: *"Multipliquei o número da mesa por 2 e somei os topos. (...) Aqui* (apontou para o item B) *deve ser 42. Na mesma lógica"*. E escreveu:

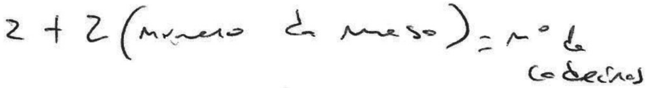


Figura 7: Resposta do aluno do 9º ano para o item C da tarefa 3.

Além de **identificar e descrever um padrão numérico**, este aluno **estabelece uma correspondência entre as quantidades** (termo geral), e **expressa simbolicamente quantidades e operações,** ainda que na forma sincopada.

Com o objetivo de verificar se cada aluno era capaz de reconhecer a existência de outras formas de generalização equivalentes à sua, após a resolução da tarefa 3 item C, apresentamos-lhes, por escrito, uma estratégia equivalente às que tinham seguido e questionamo-los: "*Outro aluno respondeu, a esta questão, da seguinte forma…* (entregámos o papel para que ele lesse) *Está correcto? Porquê?*".

Como o aluno do 4.º ano não revelou qualquer generalização para a situação proposta apresentamos-lhe a frase: *A mesa 2 tem 6 cadeiras e a mesa 1 tem 4 cadeiras, ou seja, o número de cadeiras da mesa é sempre duas a mais do que a da mesa anterior*. Ele reconheceu-a como verdadeira.

O aluno do 6.º ano expressou um raciocínio recursivo, na sua tentativa de generalização. Desse modo, apresentamos-lhe a frase: *A mesa 2 tem 6 cadeiras e a mesa 1 tem 4 cadeiras, ou seja, o número de cadeiras da mesa é sempre duas a menos do que a da próxima mesa*. Ele disse: *"Acho que está correta, é uma outra maneira de explicar"*.

Como o aluno do 9.º ano manifestou um raciocínio funcional, expressando-o por meio de uma linguagem sincopada, entregamos-lhe, em momentos diferentes, duas frases equivalentes à generalização que realizou. Na primeira estava escrito: *O número de cadeiras é quatro vezes o número de mesas, menos duas cadeiras para cada união de duas mesas.* Ele justificou, por meio de cálculos, que estava correta. A segunda frase indicava: *"2n-4+6"*. Após alguns cálculos, o aluno disse que estava correta. Quando lhe foi solicitado para comparar esta expressão com a que ele tinha escrito, argumentou: *"Eu acho que o meu caminho é muito mais simples, por que é só somar 2 ao dobro do número das mesas. Este outro terá que multiplicar o número da mesa por dois, depois subtrair 4 e somar 6. Basicamente -4 mais 6, vai ser a mesma coisa que o meu 2n mais 2"*.

Deste modo, podemos afirmar que os alunos do 6.º e 9.º anos **reconhecem como verdadeiras outras formas de generalização equivalentes à sua**.

Modelação

Ao tipo de pensamento algébrico manifestado pelos alunos na resolução da tarefa 4 está associado a busca da construção de um modelo como um modo de **expressar generalização,** na busca de uma estratégia para resolver um problema.

Nem todos os alunos resolveram a tarefa 4 com sucesso. Utilizaram sucessivas inferências lógicas, nas quais os valores desconhecidos foram interpretados como quantidades desconhecidas mas, ao adoptarem uma estratégia de tentativa e erro cometeram, por vezes, pequenos erros de cálculo que os direccionaram para valores que não poderiam levar à solução correta. O aluno do 9.º ano foi o único que, após algumas tentativas, chegou ao resultado final.

> *"Entregou 100 telegramas em 5 dias. Sete a mais em cada dia… Vamos ver[…] Se, no primeiro dia, ele entregou 10[…] 10 mais 7, 17, para o segundo dia. Para o terceiro dia 17 mais 7, 24. No quarto dia entregou 31. E no último dia vai 38. […] (sussura como se estivesse a pensar alto): 10 mais 17, 27. Este aqui vai dar, 24 mais 31, 55. E o último vai ser mais 38. Este já vai ultrapassar o 100. Então já não vai dar (risca 27, 35 e 38, conforme figura a baixo)" (Aluno do 9º ano).*

À medida que pensava, representava o seu raciocínio por meio de um esquema, revelando assim que havia compreendido o enunciado do problema.

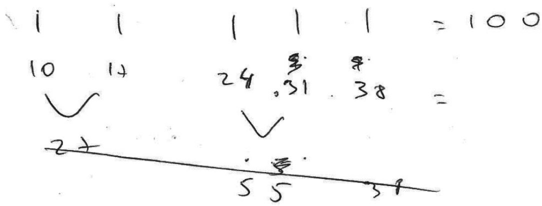


Figura 8: Resposta do aluno do 9º ano para a tarefa 4.

Após verificar que ultrapassava o valor pretendido, experimentou de novo, alterando o valor atribuído ao primeiro dia para sete e, em seguida, para cinco, até que obteve o valor desejado.

> *"Porque se o número do qual eu parto, já vai ultrapassar o 100, não faz sentido aumentar o número. 5 mais 7, 12. 12 mais 7, 19. 19 mais 7, 26. 26 mais 7, 33[…] (Silêncio enquanto faz os cálculos). 62 mais 33, também não vai dar. Vai ficar abaixo[…]. Só posso rezar para que seja o 6" (Aluno do 9º ano).*

Podemos constatar que o aluno **elabora, justifica e testa as suas conjecturas**, mas não expressa por meio de símbolos uma relação que lhe permita resolver o problema.

Os alunos do 4.º e 6.º ano, apesar de terem usado estratégias semelhantes, não concluíram a tarefa 4. Afirmaram que se fosse a mesma quantidade de telegramas por dia, bastava dividir 100 por 5. Na tentativa de resolução atribuíram valores para o primeiro dia e acrescentaram 7 telegramas para cada dia até o quinto dia, e em seguida somaram os valores encontrados. Porém o que impossibilitou que chegassem à resposta, na execução desta estratégia, foi o facto de terem errado alguns cálculos que, por vezes, desestruturaram as suas conjecturas. Por exemplo, o aluno do 6.º ano experimentou o valor de 7 telegramas para o primeiro dia, mas errou ao efectuar a soma:

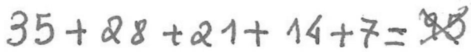


Figura 9: Primeira resolução do aluno do 6º ano para a tarefa 4.

Ao tentar o valor de 8 telegramas para o primeiro dia encontrou:

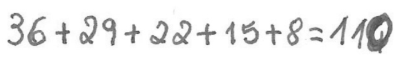


Figura 10: Segunda resolução do aluno do 6º ano para a tarefa 4.

Estes resultados desestruturaram a sua estratégia.

> *Não pode ser o 7 e o 8 porque na 1ª conta, como vimos dá 95, e aqui já dá mais que 100. Por isso o resultado tem que estar aqui entre os dois números. [...] Entre o 95 e 110. Como não há números decimais nos telegramas, acho que é impossível! (Aluno do 6º ano).*

Através da forma como analisa os resultados parece revelar não ter dificuldade em estabelecer a relação entre a quantidade total de telegramas distribuídos e o número de telegramas entregues no primeiro dia.

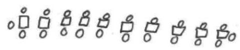
Esta dificuldade foi manifestada pelo aluno do 4º ano quando experimenta 8 quantidades diferentes para o primeiro dia, mas não apresenta qualquer relação entre os valores obtidos e as escolhas feitas para o primeiro dia. Passou de 7 telegramas no primeiro dia para 19, depois para 20 e depois para 5, como se a diferença entre estes números não fosse muito significativa ou não guardassem entre si alguma relação.

Quadro síntese

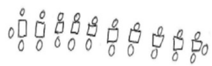
Apresentamos a seguir um quadro síntese (Quadro 1) com os tipos de pensamento algébrico que identificamos a partir do que os alunos disseram e escreveram durante a resolução das tarefas que lhes propusemos.

PENSAMENTO ALGÉBRICO			Manifestação dos alunos		
			4º Ano	**6º Ano**	**9º Ano**
ARITMÉTICA GENERALIZADA **Aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações**	**Explora propriedades das operações com números**	Utiliza a propriedade associativa da multiplicação	*Uma borboleta é 2x3 porque a outra borboleta é igual a 2x3. Este 2* (aponta para o primeiro 2 da expressão 2x2x3x3) *vem para esta* (aponta para a primeira borboleta) *e este 2* (aponta para o segundo 2 da expressão 2x2x3x3) *vem para esta (aponta para a segunda borboleta). Este 3* (aponta para o primeiro 3 da expressão 2x2x3x3) *vem para esta* (aponta para a primeira borboleta)*, e este 3* (aponta para o segundo 3 da expressão 2x2x3x3) *vem para esta* (aponta para a segundo borboleta)		
	Estabelece uma relação de identidade	Reconhece que as borboletas representam o mesmo valor	*Uma borboleta é 2x3 porque a outra borboleta é igual a 2x3.*		*Cada borboleta eu substitui por 2 vezes 3 que dá 6. Vou ter que 6 vezes 6 é 36.*
	Explora a igualdade como uma relação entre quantidades	Explora o “=” como=relação= entre=quantidades=			
	Resolve sentenças com números desconhecido	Encontra o valor representado pela borboleta			

Quadro 1 (parte 1): Tipos de Pensamento Algébrico identificados

ARITMÉTICA GENERALIZADA **Aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações**	**Explora propriedades e relações entre números**	Identifica que a soma de três parcelas iguais é um múltiplo de 3		*2+2+2=6 e o número que somado com esse que dá 22 é o 16, e não há nenhum número que multiplicado por 3 dê 16.*	*Se for 5. Cinco, cinco, cinco dá 15. Não há meio de ter três números iguais... Um número vezes 3 que vai dar 7, para chegar no 22.*
		Reconhece a magnitude dos números	* = @ + @ + @ * > @	*Estou a pensar num número que seja menor do que 5 que dê este número* (apontou para o *). *E depois quando formos somar a este* (apontou para &), *o *, o outro* (^) *dê um número menor que 10*	*Não pode ser o zero nem o 2. Porque os números que somados e vão dar o ^ são dois números que são resultado de outras somas. E não há nenhuma soma, nesses números que aqui estão, que vai dar algum algarismo que, somado com outro, vai dar um número menor que dois ou zero.*
	Trata o número algebricamente			*2+2+2=6 e o número que somado com esse que dá 22 é o 16, e não há nenhum número que multiplicado por 3 dê 16.*	*Se for 5. Cinco, cinco, cinco dá 15. Não há meio de ter três números iguais... Um número vezes 3 que vai dar 7, para chegar no 22.*
	Expressa um raciocínio multiplicativo			*Da mesa 5 até à mesa 20 são 15 mesas e em cada mesa vão ser sempre mais duas cadeiras, por isso basta fazer 2x15=30 e depois adicionar 12 a 30 que dá 42.*	
	Expressa um raciocínio aditivo		 *Vai dar 42! Porque 20+20 dá 40. Mais dois de cada lado dá 42*		

Quadro 1 (parte 2): Tipos de Pensamento Algébrico identificados (parte 2)

PENSAMENTO FUNCIONAL	**Expressa simbolicamente quantidades ou operações**	Utiliza linguagem sincopada			2 + 2 (número da mesa) = nº de cadeiras
	Encontra uma relação funcional	Estabelece uma correspondência entre quantidades (termo geral)			*Multipliquei o número da mesa por 2 e somei os topos.* 2 + 2 (número da mesa) = nº de cadeiras
		Estabelece uma relação recursiva (lei de formação)		R: Uma mesa qualquer deste tipo terá sempre mais 2 cadeiras que a mesa anterior.	
	Prevê condições desconhecidas a partir de dados conhecidos		 *Vai dar 42! Porque 20+20 dá 40. Mais dois de cada lado dá 42*	*Da mesa 5 até à mesa 20 são 15 mesas e em cada mesa vão ser sempre mais duas cadeiras, por isso basta fazer 2x15=30 e depois adicionar 12 a 30 que dá 42.*	
	Identifica e descreve um padrão numérico			R: Uma mesa qualquer deste tipo terá sempre mais 2 ca que a mesa anterior.	*Multipliquei o número da mesa por 2 e somei os topos.* 2 + 2 (número da mesa) = nº de cadeiras
	Reconhece uma relação equivalente à sua			*(…) é uma outra maneira de explicar. Também se podia dizer assim: duas a menos do que a próxima mesa. Podia ser de forma decrescente. Também daria o mesmo resultado.*	*Eu acho que o meu caminho é muito mais simples, por que é só somar 2 ao dobro do número das mesas. Este outro terá que multiplicar o número da mesa por dois, depois subtrair 4 e somar 6. Basicamente -4 mais 6, vai ser a mesma coisa que o meu 2n mais 2*

Quadro 1 (parte 3): Tipos de Pensamento Algébrico identificados

MODELAÇÃO	**Expressa generalização**	**Justifica, demonstra e testa as suas conjecturas**	*Acho que já descobri! Com o 7 dá 105, com o 8 deu 104, com 9 vai dar 103…* 7-105 8-104 9-103 10-102 11-101 12-100 *É o 12! Vou ver quantos foram por dia para responder.*	*Não pode ser o 7 e o 8 porque na 1ª conta, como vimos dá 95, e aqui já dá mais que 100. Por isso o resultado tem que estar aqui entre os dois números. (...) Entre o 95 e 110. Como não há números decimais nos telegramas, acho que é impossível!*	*Porque se o número do qual eu parto, já vai ultrapassar o 100, não faz sentido aumentar o número. 19 mais 7, 26. 26 mais sete, 33… (Silêncio enquanto faz os cálculos). 62 mais 33, também não vai dar. Vai ficar abaixo…. Só posso rezar para que seja o 6.*

Quadro 1 (parte 4): Tipos de Pensamento Algébrico identificados

Considerações finais

Temos consciência de que os tipos de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos estão condicionados às tarefas que foram propostas. Se tivéssemos um maior número de tarefas, ou acompanhado estes alunos nas suas atividades de sala de aula, é natural que outros tipos de pensamento algébrico pudessem ter sido identificados. Por exemplo, não foram propostas tarefas que permitissem identificar se os alunos são capazes de fazer generalizações sobre sistemas matemáticos, nomeadamente, se utilizam uma generalização para construir outra generalização (por exemplo: o aluno pode justificar a generalização de que a soma de três números ímpares é um número ímpar utilizando outras generalizações: ímpar + ímpar = par e par + ímpar = ímpar). No entanto, a nossa intenção era a de identificar alguns dos aspectos centrais do pensamento algébrico que nos permitissem estabelecer alguma comparação entre alunos de níveis de escolaridade diferentes.

Os tipos de pensamento algébrico revelados foram:

- Aritmética Generalizada: exploração de propriedades e relações entre números, exploração de propriedades das operações com números, exploração da relação de identidade, exploração da igualdade como uma relação entre quantidades, resolução de sentenças com números desconhecidos, tratamento algébrico do número, pensamento aditivo e multiplicativo;
- Pensamento Funcional: expressão simbólica de quantidades ou operações, estabelecimento de relações funcionais, previsões, identificação e descrição de padrões numéricos, relação de equivalência;
- Modelação: generalizações de cálculos e relações na resolução de problemas.

Relativamente às estratégias, os alunos, na maioria das vezes, demonstraram dependência de cálculos para a resolução das tarefas, utilizando o que Filloy, Rojano e Solares (2004) chamam de "Método de sucessivas inferências analíticas" (Method of Successive Analytic Inferences - MSAI) e apresentaram estratégias de experimentação. Não recorreram ao uso da linguagem simbólica, sendo que apenas o aluno do 9º ano faz uso linguagem algébrica na forma sincopada.

A seguir, relacionamos os tipos de pensamento algébrico que identificamos durante a resolução das tarefas com os aspectos da competência matemática relativos à álgebra presentes no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (PORTUGAL, 2001), e com objetivos de aprendizagem neste domínio no *Plano de Organização Curricular e Programas para o 1.º Ciclo do Ensino Básico,* e no *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem para os 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico* (PORTUGAL, 1991a, 1991b).

Os alunos revelaram *pensar aritmeticamente* nos momentos em que explicitaram oralmente e representaram por escrito os passos seguidos ao efetuar cálculos, que constitui um objetivo definido para o 1.º ciclo. Os alunos do 4.º e 6.º ano utilizaram alguns aspectos do pensamento proporcional, objetivo dos 2.º e 3.º ciclos para resolver um problema.

Um *pensar analiticamente* foi revelado pelos alunos no momento em que elaboraram hipóteses iniciais para resolução de problemas. Eles discutiram cada situação, apresentando argumentos e os processos utilizados (objetivo do 3.º ciclo).

Dos objetivos definidos para o 2.º ciclo, os três alunos traduziram dados de um problema de uma linguagem para outra (verbal, simbólica, gráfica) e descreveram e discutiram estratégias de resolução de problemas. Somente o aluno do 4.º ano utilizou propriedades das operações para simplificar o cálculo mental ou escrito e estimou ordens de grandeza do resultado, demonstrando um *pensar internamente*. Este pensar internamente foi ainda revelado, pelo aluno do 9.º ano, no momento em que estima a ordem de grandeza de um resultado antes de efetuar o cálculo (objetivo do 1.º ciclo), além disso, reconhece múltiplos de um número natural, objetivo do 1.º ciclo também atingido pelo aluno do 6.º ano. Os três alunos descobriram relações entre números, objetivo definido para o 3.º ciclo.

Quanto aos aspectos da competência matemática para o Ensino Básico, os alunos demonstraram aptidão para analisar relações numéricas de uma situação e explicitá-las em linguagem corrente. Os alunos do 6.º e do 9.º revelaram predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas. O aluno do 9.º ano mostrou aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e para analisar relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos.

Constatamos que os alunos dos três ciclos apresentaram estratégias de resolução semelhantes, e que os alunos do 1.º e 2.º ciclos atingiram alguns dos objetivos propostos, relativos à álgebra nas orientações curriculares, para o 3.º ciclo. Estes fatos reforçam a possibilidade do pensamento algébrico ser valorizado e assumido como orientação transversal no currículo. Apesar dos alunos do 1.º e 2.º ciclos terem mobilizado tipos de pensamento algébrico distintos, no que se refere a aspectos do pensamento funcional e à modelação, eles demonstraram capacidade de conjecturar e justificar fatos e relações matemáticas.

Como referimos o Novo Programa de Matemática apresenta o pensamento algébrico como um dos eixos fundamentais do processo de ensino e aprendizagem, dando grande visibilidade. O sucesso na implementação de novas orientações curriculares depende do modo como os professores lidam com elas. É de fundamental importância que os professores estejam preparados para identificar e compreender os diferentes tipos de pensamento algébrico expressos pelos alunos, sejam estes manifestados por meio de acções programadas pelo professor ou de modo espontâneo (BLANTON; KAPUT, 2005; JACOBS et al., 2007). A capacidade de os professores identificarem diferentes tipos de pensamento algébrico é condição necessária para que eles possam explorá-los, em sala de aula, nos momentos em que estes são manifestados. No entanto, para que tal aconteça é necessário providenciar formas de suporte profissional para que eles desenvolvam capacidades que possibilitem a execução das novas orientações curriculares de uma forma sustentada.

Acreditamos que a análise e o estudo dos tipos de pensamento algébrico descritos anteriormente pode constituir um importante contributo para os professores "desenvolvam 'olhos e orelhas' algébricas como uma nova forma de olhar para a matemática que ensinam e de ouvir o que os alunos pensam sobre isso" (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 440). No presente estudo, pudemos verificar que se, por um lado, os alunos começam a pensar algebricamente antes de serem sujeitos a um ensino explícito da álgebra, por outro, a linguagem e os procedimentos algébricos nem sempre são mobilizados pelos alunos na resolução de situações em que seriam úteis.

Referências

ALVARENGA, D.; VALE, I.. A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, Lisboa, v. 16, n. 1, p. 27 – 55. 2007.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Eds.). **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 29 – 47.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BRANCO, N. **O Estudo de Padrões e Regularidades no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico**. 2008. 241 f. Tese (Mestrado em Educação – Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

BURIASCO, R. L. C.; CYRINO, M. C.C.T; SOARES, M. T. C.. **Manual para correção das provas com questões abertas de Matemática:** AVA-2002. Curitiba: SEED/CAADI, 2003.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education***,* Reston, v. 37, n. 2, p. 87 - 115, mar. 2006.

FILLOY, E.; ROJANO, T.; SOLARES, A. Arithmetic/algebraic problem-solving and the representation of two unknown quantities. In: PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION INTERNACIONAL CONFERENCE, 28. 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th PME International** Conference, Bergen: Bergen University College, 2004. v. 2, p. 391 – 398.

HUNTING, R. P. Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. **Journal of Mathematiocal Behavior***,* New Brunswick, v. 16, n. 2, p. 145 – 165.1997.

JACOBS, V. R.; FRANKE, M. L.; CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; BATTEY, D. Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 38, n. 3, p. 258 - 288, mai. 2007.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG ,T. A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, p. 133 - 155, 1999.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra. In: GUTIERREZ , A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education:** Past, present and future. Roterdham: Sense, 2006, p. 11-50.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning.** Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007, p. 707 – 762.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

LINS, R. C. O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, Blumenau, v. 7, n. 1, p. 29 – 39. 1994.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: STACEY, K.; CHICK, H. (Orgs.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 47 – 70.

MATOS, A.; PONTE, J. P. O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa**, Colonia San Pedro Zacatenco - México, v. 11, n. 2, p. 195 - 231, jul. 2008.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Eds.). **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 5 – 27.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário. **Programa de Matemática:** Plano de organização do ensino-aprendizagem. Lisboa: Ministério da Educação, 1991a.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário. **Organização curricular e programas – 1º ciclo do ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 1991b.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Departamento de Educação Básica. **Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências essenciais**. Lisboa: Ministério da Educação, 2001.

PORTUGAL. Ministério da Educação. **Exame Nacional de Matemática Adaptado.** Alunos com Necessidades Educativas Especiais. 9º ano de Escolaridade. 3º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2006.

PORTUGAL. Ministério da Educação. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: Dois olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11 – 45. 2005.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: NORTH AMERICA CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION - PME, 28. 2006, Bergen, Norway. **Proceedings ...**, Bergen: Bergen University College. 2006. v. 1, p. 2 – 21.

SANTOS, M. P. **A Generalização nos Padrões:** Um Estudo no 5º Ano de Escolaridade. 2008, 187 f. Tese (Mestrado em Educação – Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia. **Canguru Matemático sem Fronteiras.** Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/canguru/>. Acesso em: 24 mar. 2008.

Submetido em Julho de 2010.
Aprovado em Setembro de 2010.

Anexo

Tarefa 1

Pelo que devemos substituir  de modo a ter-se:

 ×  = 2 × 2 × 3 × 3 ?

A) 2 B) 3 C) 2 × 3 D) 2 × 2 E) 3 × 3

Explica como chegaste à tua resposta.

Adaptado do Canguru Matemático sem Fronteiras – Categoria Benjamin (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2008)

Tarefa 2

Os cinco símbolos @, *, #, &, ^ representam cinco algarismos diferentes. Sabendo que

@ + @ + @ = *
# + # + # = &
* + & = ^

Qual é o algarismo representado por ^?

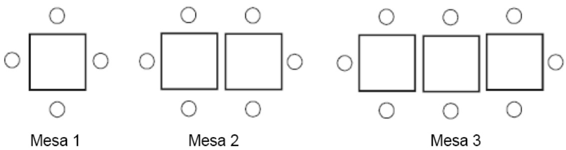
A) 0 B) 2 C) 6 D) 8 E) 9

Explica como chegaste à tua resposta.

Adaptado do Canguru Matemático sem Fronteiras – Categoria Benjamin (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2008)

Tarefa 3

Na figura encontra-se um esquema de uma das salas de jantar do Restaurante da Matemática, onde a mesa 1 tem 4 cadeiras; a mesa 2 tem 6 cadeiras e a mesa 3 tem 8 cadeiras. As mesas seguintes seguem a mesma sequência das da figura.



A- Quantas cadeiras terá a mesa 5?
B- Quantas cadeiras terá a mesa 20?
C- Quantas cadeiras terá uma mesa qualquer deste tipo?

Adaptado do Exame Nacional de Matemática Adaptado (PORTUGAL, 2006).

Tarefa 4

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. Em cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Prova de questões abertas do AVA/PR 2002. (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003)