

# Como Professores e Futuros Professores Interpretam Erros de Alunos ao Resolverem Problemas de Estrutura Multiplicativa?

## How do Teachers and Pre-service Teachers Interpret the Errors Made by Students when Solving Problems of Multiplicative Structure?

Alina Galvão Spinillo\*

Maria Tereza Carneiro Soares\*\*

Maria Lucia Faria Moro\*\*\*

Sintria Labres Lautert\*\*\*\*

### Resumo

O artigo trata da interpretação que professores e futuros professores fazem dos erros de alunos do ensino fundamental na solução de problemas de estrutura multiplicativa. Os participantes foram 12 futuros professores e 12 professores de matemática do ensino fundamental. Em entrevista semiaberta, foram-lhes apresentadas seis cartelas, cada uma contendo o enunciado de um problema (três de produto de medidas, três de isomorfismo de medidas) cuja solução incorreta deveria ser interpretada. Os entrevistados identificaram erros de natureza procedimental, linguística e conceitual. Futuros professores e professores viram os erros nos problemas de produto de medidas, sobretudo como conceituais, e os erros nos problemas de isomorfismo de medidas, sobretudo como linguísticos. Como o mesmo padrão de resultados quantitativos foi encontrado para os dois grupos, conclui-se que no ensino de matemática, o tipo de problema tem papel relevante na forma de interpretar erros, mais que a formação e a experiência dos professores.

**Palavras-chave:** Interpretação de Professores. Erros de Alunos. Problemas de Estrutura Multiplicativa.

### Abstract

---

\* Doutora em Psicologia do Desenvolvimento pela University of Oxford. Professora titular do Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Arquitetura s/n, PPG em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, CFCH, 8o andar, Cidade Universitária, CEP 50.740-550, Recife, Pernambuco, Brasil. *E-mail:* [alinaspinillo@hotmail.com](mailto:alinaspinillo@hotmail.com)

\*\* Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora associada do Departamento de Planejamento de Administração Escolar da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: UFPR, Setor de Educação, Rua Gal. Carneiro, 460, 5º andar, CEP 80060-150, Curitiba, Paraná, Brasil. *E-mail:* [mariteufpr@gmail.com](mailto:mariteufpr@gmail.com)

\*\*\* Doutora em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora titular aposentada do Departamento de Educação da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Endereço para correspondência: Rua Ubaldino do Amaral, 760, ap. 901, Centro, CEP 80060-172, Curitiba, Paraná, Brasil. *E-mail:* [mlfmoro@sul.com.br](mailto:mlfmoro@sul.com.br)

\*\*\*\* Doutora em Psicologia Cognitiva pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professora associada do Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Arquitetura s/n, PPG em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, CFCH, 8o andar, Cidade Universitária, CEP: 50.740-550, Recife, Pernambuco, Brasil. *E-mail:* [sintrialautert@gmail.com.br](mailto:sintrialautert@gmail.com.br)

This study investigates how in-service and pre-service teachers interpret the errors made by students when solving problems of multiplicative structure. Participants were 12 pre-service and 12 Mathematics Elementary School teachers. In a semi-structured interview, each participant was presented six cards, each one containing a mathematical problem (three product of measures and three isomorphism of measures problems) which incorrect solutions should be interpreted. According to the participants, the errors were procedural, linguistic and conceptual in nature. Pre-service and in-service teachers considered the errors in the product of measures problems mostly as conceptual in nature, while errors in isomorphism of measures problems were mostly linguistic in nature. As the two groups showed the same pattern of quantitative results, was concluded that in Mathematics teaching, more than professional training and experience, the nature of the problem has a relevant role in the way that errors are interpreted.

**Keywords:** Teachers' Interpretation. Students' Errors. Problems of Multiplicative Structure.

## 1 Introdução

Analisar erros na solução de problemas matemáticos há muito tem interessado pesquisadores e estudiosos no campo da psicologia da educação e no da educação matemática. Essa análise tem focalizado erros na solução de problemas de matemática por parte de alunos de diferentes segmentos da escolaridade (ensino fundamental, médio e superior), bem como de futuros professores e professores de matemática.

Cury (2007), em estudo de revisão da literatura, analisou como os erros são tratados na pesquisa em educação matemática: em pesquisas (nacionais e estrangeiras) é constante a tentativa de elaborar uma tipologia de erros nos diferentes campos da matemática, havendo, ainda, a preocupação em comparar a distribuição dos tipos ou classes de erros em diferentes grupos de participantes.

Um exemplo desse tipo de investigação é o estudo de Botelho et al. (2006), no campo da psicologia cognitiva, em que foram identificados dois tipos de erro de crianças ao solucionarem problemas de estruturas aditivas: erros estruturais e funcionais. Conforme inspiração piagetiana, as definições de erro estrutural e de erro funcional propostas reportam-se a constructos relativos à dimensão cognitiva: a de erro estrutural remete às estruturas cognitivas necessárias à resposta correta; e a de erro funcional, ao emprego de um procedimento de solução já empregado em problema análogo, mas não adequado ao problema atual a solucionar.

Em educação matemática, podem-se identificar duas maneiras distintas de se conceber o erro. A primeira refere-se ao erro como indicador do conhecimento matemático apresentado pelo indivíduo em situação de avaliação; e a segunda, toma o erro como estratégia didática.

No que se refere à primeira abordagem, o foco recai sobre o nível de dificuldade dos indivíduos em alguns itens de um dado instrumento, para construir instrumentos de avaliação mais apropriados e capazes de indicar os níveis crescentes de dificuldade dos itens. No Brasil,

há trabalhos de elaboração de instrumentos de avaliação do desempenho escolar em matemática em larga escala, com o objetivo de avaliação externa do que se passa nos sistemas (e.g., OLIVEIRA; FRANCO; SOARES, 2007). Porém, são menos numerosos os estudos específicos sobre a relação entre desempenho de alunos e natureza do item para elaborar instrumentos gerais de avaliação (e.g., CÂMARA DOS SANTOS, 2013; ORTIGÃO; AGUIAR, 2013).

Quanto à segunda forma de conceber o erro, como estratégia didática, os estudos, em geral, procuram identificar, mapear e categorizar as dificuldades que os participantes experimentam na solução de cada problema e as possíveis causas dessas dificuldades. A ideia subjacente é que, a partir do conhecimento acerca das formas de raciocinar, situações de ensino sejam propostas para superar aquelas dificuldades. Neste sentido, os procedimentos de resolução de problemas tornam-se o foco de interesse dos pesquisadores e educadores (GITIRANA et al., 2014; GÓMEZ, 1995), sendo expressiva a literatura em educação matemática que investiga o erro como estratégia didática (e.g., ASTOLFI, 1999; BESSOT, 1983; BORASI, 1996; BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009; DE LA TORRE, 2007; DEL PUERTO; MINAARD; SEMINARA, 2006; MOREN; DAVID; MACHADO, 1992; PINTO, 2000; SANTOS; BURIASCO, 2008).

Muitos desses estudos são apoiados em referencial piagetiano, como o de Bessot (1983), que analisou a construção da noção de número natural em crianças de 6 a 7 anos; o de Astolfi (1999), que investigou o *status* do erro na escola e, apoiando-se também em Bachelard, apresentou uma tipologia dos erros dos alunos, alertando para a potencialidade desses no processo de ensino.

Outros estudos de mesma marca, específicos da educação matemática, consideram o erro como forma de pensar, do mesmo modo que o é o acerto. Pinto (2000), por exemplo, discute a função do erro no processo de aprendizagem da matemática, analisando qualitativamente a produção de alunos de 4ª série (atual 5º ano) do ensino fundamental a partir de observações na sala de aula e de entrevistas. Borasi (1996), em uma síntese de seus estudos, segue defendendo o erro como *trampolim para a aprendizagem* e, também, como *trampolins para a investigação no ensino de matemática*, para que o potencial dos erros seja tomado como fonte de indagações.

Cury (2004) propõe a análise de erros como abordagem de pesquisa em educação matemática. Remete o leitor ao fecundo referencial sobre o tema em pesquisas com estudantes de ensino superior em disciplinas do curso de Matemática, fora apresentar analiticamente os

resultados obtidos em pesquisa realizada com alunos de diversos cursos superiores matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Por sua vez, Buriasco (1999) verificou como professores e alunos lidavam com questões de uma prova de matemática aplicada em larga escala a estudantes de escolas paranaenses. E Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) apresentaram evidências de que a análise da produção escrita pode ser usada também como estratégia para obter informações sobre como os alunos interpretam uma situação, como procedem ao solucionar um problema, que dificuldades apresentam, o que demonstram saber ou o que estão próximos de saber.

Também, trabalhos com abordagem psicológica tratam do erro como estratégia didática. Por exemplo, Orozco-Hormaza (2005), analisando os erros de alunos colombianos do ensino fundamental, documenta tipos de erros na escrita dos numerais: erros léxicos e erros sintáticos. Os erros léxicos referem-se a equívocos que cometem ao produzir os dígitos que compõem um número (troca do lugar dos dígitos, por exemplo); e os erros sintáticos se referem a equívocos na maneira de fragmentar os números em função de sua expressão verbal falada e não em função das partículas de quantidade e em partículas que marcam o valor posicional (escrever 2001 como 201- duzentos e um). A incidência desses tipos de erros varia no decorrer da escolaridade, podendo diminuir a partir de situações didáticas que explorem a composição aditiva e a composição multiplicativa de modo a levar as crianças a compreender que o numeral representa uma totalidade e que seus algarismos devem respeitar uma determinada ordem.

Há, também, investigações sobre como os professores lidam com os erros dos alunos na solução de problemas. São abordagens que consideram os erros como relevantes tanto do ponto de vista psicológico (por ser expressão do raciocínio), como do ponto de vista didático (por ser uma estratégia didática). Segundo Cury (1994), não são frequentes os estudos que investigam essas questões em conjunto. Em sua pesquisa, a autora analisou como professores identificam, classificam e descrevem os erros no exercício da docência em disciplinas ofertadas pelo departamento de matemática, aos vários cursos de uma universidade.

Entre vários resultados sobre o ensino da matemática na escola elementar, Moro e Soares (2006) descrevem a natureza e o nível de integração de duas professoras nas tarefas da investigação, mediante análise das transformações que elas expressaram ao avaliar as realizações de seus alunos em situações de adição-subtração. A referida integração sinalizou mudanças interessantes na forma de as professoras organizarem aspectos de seu ensino, do que ficaram sublinhadas: primeiro, a necessidade de análise interligada dos resultados do aprender dos alunos com as formas de ensinar os conteúdos, o que foi favorecido pela

participação das professoras na pesquisa; segundo, no âmbito da formação continuada dos docentes, o significado da tomada de consciência dos resultados de seu fazer pedagógico para a progressão de seus conhecimentos profissionais.

Por seu lado, Koch e Soares (2005), em um estudo de casos, realizaram uma pesquisa com uma professora de ensino fundamental de uma escola pública. Essa professora interpretou os erros, analisando a notação de alunos de 6ª série (atual 7º ano) em problemas de estrutura aditiva. Dessa análise resultou a descrição das formas de interpretação da professora em relação aos seguintes aspectos da atividade cognitiva dos alunos: tipos de notação; forma de combinar os dados do problema e domínio dos conteúdos envolvidos. De acordo com as autoras, a maior dificuldade das professoras em interpretar as produções dos alunos deveu-se à falta de conhecimentos sobre os processos cognitivos e a forma de raciocinar subjacentes às notações dos alunos.

Como destacado, seja no contexto da avaliação do conhecimento matemático, seja no contexto do ensino e da aprendizagem, em geral os pesquisadores, ao interpretarem os erros, estão atentos tanto ao ponto de vista psicológico quanto ao didático. Estariam os professores também atentos a isso? Como interpretam os erros dos alunos? E os futuros professores? Seriam eles capazes de identificar erros de natureza distinta? Ou tenderiam a dar a todo e qualquer tipo de erro uma mesma interpretação? Seria o tipo de problema considerado na interpretação dos erros por parte de professores e futuros professores? Essas são questões tratadas na presente pesquisa, em continuidade e aprofundando os estudos de Cury (1994) e de Koch e Soares (2005), na tentativa de contribuir para o debate sobre o papel do erro no ensino e na aprendizagem da matemática, a partir de uma análise de como ele é interpretado por professores e por futuros professores de matemática.

Revisitando resultados da literatura (por exemplo, BOTELHO et al., 2006), assumimos, no presente estudo que, em síntese, os erros na solução de problemas matemáticos podem ser agrupados, ao menos, em duas grandes classes: erro conceitual e erro procedimental. Entendemos que o erro conceitual expressa limite de compreensão acerca dos aspectos cruciais relativos às demandas do problema, podendo ser entendido como indício de limite expressivo de elaboração do conceito matemático ali envolvido; por exemplo, seria o erro decorrente do uso de esquemas ou relações aditivas na solução de problemas de combinatória, quando relações ou esquemas multiplicativos seriam necessários. Já o erro procedimental são os ocorridos durante o processo ou procedimento de solução, como os erros de cálculo. Esses erros não estão diretamente relacionados a uma falta de compreensão

dos aspectos cruciais relativos ao conceito matemático envolvido no problema, mas à aplicação das regras algorítmicas.

Também, escolhemos analisar a interpretação dos participantes sobre as soluções incorretas de alunos do ensino fundamental a determinados tipos de problemas de estrutura multiplicativa, a saber: problemas de produto de medidas, envolvendo raciocínio combinatório, e problemas de isomorfismo de medidas, envolvendo raciocínio proporcional. São estes problemas relacionados a conceitos importantes e complexos tanto do ponto de vista cognitivo como educacional (VERGNAUD, 1983, 2014).

## 2 Método

### 2.1 Participantes

Os participantes foram divididos em dois grupos. O Grupo 1, formado por 12 futuros professores de matemática cursando licenciatura em matemática; e Grupo 2, formado por 12 professores que ensinavam em turmas do 3º ao 5º ano do ensino fundamental com formação em licenciatura em matemática, atuando em escolas públicas e particulares de Curitiba e região metropolitana

### 2.2 Material e procedimento

Os participantes foram individualmente entrevistados (entrevista de estilo clínico-crítico) em uma única sessão, audiogravada. Foram-lhes apresentadas, uma por vez, seis cartelas, cada uma contendo o enunciado de um problema e um procedimento incorreto de resolução. Em três cartelas os problemas eram de produto de medidas (Apêndice A) e, nas outras três, de isomorfismo de medidas (Apêndice B). A ordem de apresentação das cartelas foi aleatória, decidida por sorteio para cada participante.

Inicialmente, o participante era informado que as soluções incorretas das cartelas haviam sido efetivamente realizadas por alunos do ensino fundamental<sup>1</sup>. A entrevista tinha por objetivo examinar se os participantes eram capazes de identificar, a partir do erro, a forma de raciocinar adotada pelo aluno na resolução dos problemas. Com base no estudo de Koch e Soares (2005), a instrução foi a seguinte: *Em uma escola, alunos do ensino fundamental*

---

<sup>1</sup> As referidas soluções incorretas foram obtidas de participantes de várias investigações realizadas acerca da solução de problemas de estrutura multiplicativa.

foram solicitados a resolver diversos problemas matemáticos. Muitos deles resolveram de forma inapropriada, como as que eu vou mostrar a você nessas cartelas. Esta (mostra uma cartela) foi a forma de resolução adotada por um desses alunos ao tentar solucionar o seguinte problema (lê em voz alta o enunciado do problema escrito na cartela). Em seguida o entrevistador perguntava: *Olhando essa forma de resolução (mostra a cartela), você sabe dizer o que foi que esse aluno fez? Como foi que ele resolveu o problema? Como ele estava pensando? Qual o erro/dificuldade que ele apresentou?* Outras perguntas de mesmo teor foram, por vezes, feitas, para obter informações que pudessem esclarecer as bases das respostas dadas.<sup>2</sup>

### 3 Resultados

As respostas de cada participante frente a cada cartela foram, primeiro, analisadas qualitativamente e em seu conjunto, de modo a tornar possível compreender a forma de pensar do entrevistado sobre os erros produzidos pelos alunos (vide problemas e suas soluções nos Apêndices A e B). Diversas categorias de respostas foram, então, obtidas. Em um segundo momento, com base em discussão e acordo entre dois juízes experientes em análises dessa natureza, aquelas categorias foram agrupadas em quatro tipos de interpretação. Importante esclarecer que havia ocasiões em que mais de um tipo de resposta estava presente na fala do entrevistado em relação a uma dada cartela e que a classificação da resposta em um tipo em particular era feita com base na interpretação que mais caracterizava a resposta do entrevistado. Assim, foram identificados quatro tipos de interpretação dos entrevistados acerca do erro ilustrado nas cartelas, tipos estes descritos e exemplificados a seguir.

*Tipo 1 (não interpreta):* o entrevistado se limita a mencionar apenas a operação efetuada ou a tecer comentários acerca de aspectos que, efetivamente, não se relacionam à interpretação do erro apresentado. Exemplos<sup>3</sup>:

- Exemplo 1:

*E: (faz a leitura do problema) Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos? E: Por que você acha que ele (o aluno) fez isto? FP: Nossa! Pô, o*

<sup>2</sup> A lembrar que, seguindo a tradição piagetiana, no emprego da entrevista clínico-crítica, não há roteiro fixo de perguntas adaptando-se elas em quantidade e tipo à obtenção de informações suficientes à análise das concepções do entrevistado, sobretudo fazendo-o falar e deixando-o falar.

<sup>3</sup> Neste e nos demais exemplos, as falas durante as entrevistas são assim identificadas: E: entrevistadora; FP: futuro professor e P: professor.

*piá tava... E: Estava... (rindo) FP: O piá estava com a cabeça noutra lugar quando foi fazer a prova.*

*Tipo 2 (operação inadequada):* o entrevistado afirma que o erro decorre do uso de uma operação inadequada que foi empregada e que esta se trata de uma operação fácil que o aluno já domina. Exemplos:

- Exemplo 2:

*E: (faz a leitura do problema) Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos? E: Olha a solução. O que você acha desta solução O que passou pela cabeça do aluno? Como é que ele pensou? FP: (silêncio) Também eu acho que o carinha aqui gosta de somar, né? E: Gosta de somar? FP: É uma operação mais fácil. E: E o gosto dele explica... FP: É, acho que é a operação mais fácil pra ele... E: Mais fácil? FP: Mais intuitiva, né? A soma. E: Ahan... FP: É a única explicação que tem para isto aqui; dá pra ver que ele não pensou sobre o problema. Não fez a operação da divisão, né? E: Tá ok,... aí? FP: É, é por aí.*

- Exemplo 3:

*E: (faz a leitura do problema) Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento vai durar? E: Olhe a solução deste aluno... ele fez aqui a solução, pôs a resposta lá. É, diga o que é que você pensa, o que é que você acha que ele pensou pra escolher esta solução? O que será que passou pela cabeça dele? P: Me dá a impressão que ele domina bem a adição. E para ele ficou óbvio que, como ele domina a adição, ele não fez outras tentativas.*

*Tipo 3 (incompreensão do enunciado):* o entrevistado afirma que o erro decorre de dificuldades em compreender a linguagem do enunciado do problema. Menciona que o aluno se limita às palavras e aos números contidos no enunciado sem refletir sobre o que efetivamente significam. Exemplos:

- Exemplo 4:

*E: (faz a leitura do problema) Uma floricultura vende caixas de jarros com flores. Cada caixa tem 6 jarros. Por sua vez, cada jarro vem com 2 flores. Sandra comprou 3 caixas. Quantas flores ela levou? E: Olhe essa solução, tem a resposta. Como será que este menino pensou? FP: ... é mais problema de interpretação..., pra um quarto, um quinto ano o problema está muito mal escrito;... acho que não precisaria tanta 'por sua vez', essas coisas. Que a criança só vê os números e depois ela sai somando tudo. Por exemplo, 'quantas flores ela levou', dá a ideia de compra, então você soma os números que você tem.*



- Exemplo 5:

*E: (faz a leitura do problema) Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento vai durar?*

*E: Olhe a solução aqui... P: A mesma ideia. E: O que será que ele pensou? Como será que ele foi...? P: Ele pescou os números do problema e juntou. E: Pôs até a resposta ali. P: Vai durar trinta e seis dias. É, isso é mais do que comum, do que a gente imagina. A questão é aquela leitura rápida, eu quero resolver; eu acho que quantos dias ela vai tomar, se eu tenho isso e isso, ah! Então eu tenho que juntar... Sabe, é imediato, é automático, é meio que automático esse tipo de solução.*

*Tipo 4 (incompreensão conceitual):* o entrevistado afirma que o erro se deriva de uma incompreensão conceitual por parte do aluno no que concerne às relações multiplicativas necessárias para a resolução do problema, tais como o esquema de correspondência e a noção de agrupamentos. Exemplos:

- Exemplo 6:

*E: (faz a leitura do problema) Pedro tem 3 camisetas: vermelha, amarela e verde; e 5 bermudas: marrom, laranja, preta, azul e branca. Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar? E: Olhe esta solução, e veja o que será que passou pela cabeça do freguês aqui, como será que ele pensou? FP: (silêncio) Aqui eu acho que ele pensou que bastaria fazer, colocar no desenho uma, uma camiseta e uma calça de cada cor para... E: Ahan, ahan... FP: ... bastaria então, e estava certo. Acho que ele não levou em conta que aqui estavam cinco bermudas, né? E: Ahan, ahan... FP: Eu acho que faltou conteúdo pra ele mesmo, assim, ou também, levando em conta a idade, acho que inclusive ele nem olhou aqui, eu acho isto, porque ele pensou, acho que ele pensou isto, pensou errado, né? E: Pensou isto... FP: Porque colocando uma cor diferente aqui, vai ser diferente. E: Porque são estas... FP: Estas, foi as em que ele pensou... E: E termina por aí... FP: É isto, ele não pensou que se ele pegasse uma vez cinco bermudas, teria quatro escolhas diferentes pra fazer, daí; e se pegasse mais duas, teria três ainda. E: Ahan, ahan... FP: Daí, tipo usar o princípio da multiplicação, né? E isto com certeza ele não ia saber.*

- Exemplo 7:

*E: ... (faz a leitura do problema). Um parque de diversão tem 6 entradas A, B, C, D, E, F e 2 saídas 1 e 2. Combinando as entradas e saídas, Daniela pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair do parque? E: Olhe esta solução. E o que é que você acha, qual foi o jeito que o menino pensou aí? P: (silêncio) Na verdade, né, também envolve uma ideia combinatória e de multiplicação, né? Como ele pensou “de quantas maneiras diferentes”, então ele achou que só poderia combinar*

a questão de uma entrada com um só tipo de saída, né? E o que a gente deveria fazer na verdade, é combinar cada saída com cada entrada, é isso? E: Ahan,...ahan...P: ... isso, cada entrada, né? Então, na verdade, deveria combinar; na lógica do estudante, provavelmente ele pensou que já que eram quantas maneiras diferentes, então eu não poderia fazer a saída 1 com a entrada A, e a saída 2 com a entrada A, não poderia. É, mas, na verdade, o que deveria ter sido feito, é ... todas as possibilidades, né? E: Ahan,...ahan...

- Exemplo 8:

E: (faz leitura do problema) Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos? E: Olha esta solução. Neste caso, como será que o menino pensou? P: (silêncio...) E: O que é que passou pela cabecinha dele? P: (silêncio...) Na verdade, ele não fez uma correspondência, o que no caso a gente faria, né? Ele simplesmente assim... acho que nem houve uma interpretação, nem houve por que... porque simplesmente somou os dados, ele está relacionando ovos com bolos, ele está somando ovos com bolos; então ele não está fazendo uma correspondência como normalmente a gente faz numa receita: 15 ovos três bolos, né...? E: Ahan, ahan... P: ... cinco bolos, quantos ovos? Então você está fazendo uma relação matemática, e depois vai cair numa questão de proporção, né? E que até hoje estávamos comentando que, na verdade, a matemática se resume muito em regra de três e correspondências, né? A gente faz muitas relações matemáticas. Então aqui no caso, o que é que fez: a lógica que utilizou, eu não sei se ficou assim meio sem lógica, no caso, porque não houve interpretação; se houvesse interpretação, não ia somar ovos com bolos.

Como mostra a Tabela 1, de modo geral, os grupos apresentam um mesmo padrão de resultados, como evidenciado pelo teste *t de Student*, uma vez que não foram detectadas diferenças significativas entre eles em relação a qualquer um dos tipos de respostas.<sup>4</sup>

**Tabela 1-** Número e porcentagem (em parênteses) de cada tipo de resposta por grupo de participantes (máximo= 72)

Grupos	Respostas			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Futuros professores	4 (5,5%)	7 (9,8%)	12 (16,7%)	49 (68%)
Professores	6 (8,4%)	4 (5,5%)	12 (16,7%)	50 (69,4%)

Nota: Tipo 1 - não interpreta; Tipo 2 - operação inadequada; Tipo 3 - incompreensão do enunciado; e Tipo 4 - incompreensão conceitual.

<sup>4</sup> Conforme o escopo da investigação, foi empregado o teste *t de Student* para amostras independentes e relacionadas, posto ser necessário fazer uma comparação entre médias em duas direções, intergrupos (professores vs futuros professores), e intragrupos (por exemplo, verificando diferenças entre tipos de problemas separadamente).

O que se observa é que em ambos os grupos a maioria das respostas corresponde a interpretações do Tipo 4 (Futuros professores: 68% e Professores: 69,4%) que se referem a limites de compreensão conceitual. São raras as respostas Tipo 1 (Futuros professores: 5,5% e Professores: 8,4%) em que o entrevistado não interpreta o erro apresentado. Esse resultado indica que o tipo de interpretação acerca do erro dos alunos não varia em função de o participante ser entrevistado ser um futuro professor ou já ser um professor.

O padrão de resultados varia um pouco quando se considera cada grupo separadamente em relação aos tipos de problemas. A partir desta análise, observa-se que, em relação aos futuros professores (Tabela 2), as respostas Tipo 3 são significativamente mais frequentes aos problemas de isomorfismo de medidas (raciocínio proporcional) do que aos de produto de medidas (raciocínio combinatório) ( $t = -4,022$ ,  $p = 0,002$ ); Já as respostas Tipo 4 foram expressivamente mais frequentes nos problemas de produto de medidas (raciocínio combinatório) do que aos de isomorfismo de medidas (raciocínio proporcional) ( $t = 4,926$ ,  $p = 0,000$ ).

**Tabela 2** - Número e porcentagem (em parênteses) de tipos de respostas dados pelos futuros professores por tipo de problema (máximo=36).

Problemas	Respostas			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Produto de medidas	0 (0,0)	2 (5,5%)	1 (2,8%)	33 (91,7%)
Isomorfismo de medidas	4 (11,1%)	5 (13,9%)	11 (30,6%)	16 (44,4%)

Nota: Tipo 1 - não interpreta; Tipo 2 - operação inadequada; Tipo 3 - incompreensão do enunciado; e Tipo 4 - incompreensão conceitual.

Importante ressaltar dois aspectos a respeito do modo como o futuro professor interpretou os erros nos problemas de produto de medidas, os quais envolvem raciocínio combinatório: primeiro, a quase totalidade das respostas foi do Tipo 4 (91,7%); segundo, os futuros professores nunca deixaram de interpretar os erros em problemas desse tipo (respostas Tipo 1: 0%). Aos olhos desses participantes, os erros nos problemas envolvendo raciocínio combinatório, deviam-se, particularmente, a limitações de natureza conceitual, mais do que ao emprego da operação pertinente ou a questões de natureza linguística (interpretação de palavras-chave do enunciado).

Em relação aos professores (Tabela 3), o teste *t de Student* revelou haver diferenças significativas entre os tipos de problemas em relação às respostas Tipo 3 ( $t = -2,345$ ,  $p = 0,039$ ) e Tipo 4 ( $t = 2,966$ ;  $p = 0,013$ ).

**Tabela 3** - Número e porcentagem (em parênteses) de tipos de respostas dados pelos professores por tipo de problema (máximo=36).

Problemas	Respostas			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Produto de medidas	4 (11,1%)	1 (2,8)	2 (5,5%)	29 (80,6%)
Isomorfismo de medidas	2 (5,5%)	3 (8,3%)	10 (27,8)	21 (58,4%)

Nota: Tipo 1 - não interpreta; Tipo 2 - operação inadequada; Tipo 3 - incompreensão do enunciado; e Tipo 4 - incompreensão conceitual.

Como se nota, o percentual de respostas Tipo 3 foi maior aos problemas de isomorfismo de medidas, envolvendo raciocínio proporcional (27,8%), do que aos de produto de medidas, envolvendo raciocínio combinatório (5,5%); já quanto às respostas Tipo 4, seu percentual foi maior aos de produto de medidas (80,6%) do àqueles de isomorfismo de medidas (58,4%). Comparando-se estes resultados com aqueles relativos aos futuros professores, nota-se que o padrão obtido é o mesmo, não havendo diferenças quanto às interpretações sobre os erros dos alunos que possam ser atribuídas ao fato de o entrevistado ser professor ou futuro professor.

Contudo, se por um lado a formação do participante não se mostra fator determinante da natureza da interpretação dada ao erro, o tipo de problema, por outro lado, surge como relevante. De modo geral, como ilustrado na Tabela 4, aos problemas de produto de medidas, envolvendo raciocínio combinatório, a grande maioria das respostas foi do Tipo 4 (86,1%), enquanto que aos problemas de isomorfismo de medidas, envolvendo raciocínio proporcional, a concentração de respostas ocorreu tanto nas de Tipo 3 (29,2%) como nas de Tipo 4 (51,4%).

**Tabela 4** - Número e porcentagem (em parênteses) de cada tipo de resposta por tipo de problema (máximo = 72)

Problemas	Respostas			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Produto de medidas	4 (5,5%)	3 (4,2%)	3 (4,2%)	62 (86,1%)
Isomorfismo de medidas	6 (8,4%)	8 (11%)	21 (29,2%)	37 (51,4%)

Nota: Tipo 1 - não interpreta; Tipo 2 - operação inadequada; Tipo 3 - incompreensão do enunciado; e Tipo 4 - incompreensão conceitual.

De acordo com o teste *t de Student*, diferenças significativas foram encontradas em relação às respostas Tipo 2 ( $t = -2,469$ ,  $p = 0,022$ ) e Tipo 3 ( $t = -4,338$ ,  $p = 0,000$ ), as quais foram significativamente mais frequentes aos problemas de isomorfismo de medidas, envolvendo raciocínio proporcional, do que aos de produto de medidas, envolvendo raciocínio combinatório; e respostas Tipo 4 ( $t = 5,346$ ,  $p = 0,000$ ) foram mais observadas aos problemas de produto de medidas do que aos de isomorfismo de medidas. Esse resultado indica que,

segundo a interpretação dos entrevistados, os erros nos problemas de produto de medidas, os quais envolvem raciocínio combinatório, devem-se, basicamente, a uma incompreensão conceitual do aluno; já os erros nos problemas de isomorfismo de medidas, os quais envolvem raciocínio proporcional, seriam para eles tanto de natureza conceitual como linguística, esta última razão relativa ao enunciado do problema.

#### **4 Discussão e conclusões**

A maneira de conceber e de tratar o erro dos alunos é considerada um grande desafio para o ensino de matemática, assim como um conhecimento de grande relevância que deve compor o conjunto de conhecimentos que habilitam o indivíduo para a docência (CURY, 2012; PENG; LUO, 2009). Estudiosos tanto da psicologia da educação como da educação matemática, ressaltam que as diferentes concepções sobre o erro dos alunos têm implicações para a prática em sala de aula e que os erros precisam ser interpretados pelo professor, pois revelam aspectos da organização intelectual do aluno (CASÁVOLA, 1988; RADATZ, 1979; SPINILLO et al., 2014). Aprofundando essas discussões, o presente estudo buscou oferecer subsídios mais específicos sobre como professores e futuros professores interpretam os erros dos alunos em situações de solução de problemas, focalizando a solução de problemas de estrutura multiplicativa, muitas vezes vistos como difíceis para estudantes do ensino fundamental. Saber como professores e futuros professores interpretam os erros dos alunos, ou seja, como compreendem as razões de os alunos errarem, parece ser um primeiro passo na tentativa de transformar o erro em uma ferramenta didática (CURY, 2007; PINTO, 2000).

Nesse cenário, em resposta às questões colocadas na Introdução, os resultados acima relatados indicam que professores e futuros professores mostram-se capazes de identificar a natureza distinta de erros dos alunos na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa focalizados, uma vez que a presença de interpretação desses erros predominou fortemente sobre casos de ausência de qualquer interpretação. Assim sendo, foi-lhes possível identificar diferentes tipos de erros, os quais, aqui, foram classificados conforme três naturezas distintas: procedimental, linguística e conceitual.

Cumprido destacar que, neste estudo, houve a identificação de uma categoria de interpretação de erros não prevista: a de natureza linguística. Este é fato significativo, pois sinaliza ser possível a professores e a futuros professores apontar problemas de compreensão do enunciado do problema de parte dos alunos. É dimensão que sinaliza tanto a necessidade de leitura com compreensão dos alunos (aspectos ligados ao domínio do português), como

também pode ser atribuível a limites docentes na formulação desses enunciados, logo, do âmbito da capacitação dos próprios educadores. Esse último ponto nos sugere que os entrevistados estariam atentos a aspectos didáticos, por exemplo, à qualidade da formulação de enunciados de problemas.

Identificados os tipos de interpretação, foi verificado se eles variavam em função da formação do entrevistado (futuro professor e professor em exercício) e do tipo de problema (de produto de medida, envolvendo raciocínio combinatório, e de isomorfismo de medida, envolvendo raciocínio proporcional). Os dados mostraram a tendência de professores e futuros professores de interpretar o erro, sobretudo, como decorrente de limites de compreensão conceitual: o aluno não compreende as relações multiplicativas necessárias à resolução dos tipos de problemas focalizados. Esse resultado sugere que professores e futuros professores estariam, de alguma forma, atentos à dimensão psicológica em jogo no erro dos alunos.

No entanto, o tipo de problema surgiu como fator importante quanto às interpretações tanto de professores como de futuros professores: os erros nos problemas de produto de medidas, envolvendo raciocínio combinatório, foram interpretados basicamente como conceituais; porém, nos problemas de isomorfismo de medidas, foram eles vistos, sobretudo, como conceituais, mas também como linguísticos.

Por que a predominância de erros conceituais aos problemas envolvendo raciocínio combinatório? Provavelmente, ela se deve ao seguinte: a) as soluções expressas predominantemente em desenhos ou diagramas, ajudaram a evidenciar o número limitado de combinações entre os elementos que puderam ser feitas, assim sugerindo fortemente aos entrevistados a ausência do domínio conceitual pertinente; b) também, os enunciados suficientemente claros desse tipo de problema permitiram a identificação do tipo e da quantidade de elementos a combinar, afastando assim a hipótese de ali haver limites linguísticos para a compreensão (vide problemas e suas soluções no Apêndice A).

Por sua vez, a atribuição a erros conceituais a par da presença forte de atribuição a erros linguísticos no caso das soluções dos problemas de isomorfismo de medidas, envolvendo raciocínio proporcional, permite supor que: a) as soluções expressas em cálculos escolares já automatizados, embora permitissem ver ali ausência de compreensão, mascararam alguma possibilidade de identificar qualquer relação, mesmo incompleta, que ali poderia ter sido captada pelo aluno, ao que se acrescenta b) a ausência clara, nos enunciados (clássicos) desse tipo de problema, de alguma informação intermediária que ajudasse a

identificar a relação proporcional básica à solução (vide problemas e suas soluções no Apêndice B).

Como mencionam Koch e Soares (2005, p. 177), é necessário que as soluções dos alunos sejam conhecidas e interpretadas pelo professor de forma mais ampla e com um retorno para o ensino, e não apenas limitadas a situações com vistas a verificar *se o aluno acerta ou erra a questão, ou ainda o 'quanto' ele sabe sobre determinado assunto e não 'como' ele sabe, menos ainda 'por que' ele sabe ou não sabe.*

Para finalizar, complementando o que afirmam Ball, Thames e Phelps (2008) acerca dos conhecimentos que precisam ser dominados pelos professores que ensinam matemática, parece relevante incluir, no leque de competências desses docentes, conhecimentos acerca de como lidar com os erros dos alunos. Um primeiro passo parece ser o de compreender como os professores interpretam os erros, como refletem acerca da situação-problema e das competências (conceituais, linguísticas, procedimentais) dos alunos frente a uma dada situação. Um segundo passo seria compreender qual a proposta didática do professor frente àquele erro. Os resultados obtidos sugerem que tanto professores como futuros professores levam em conta vários aspectos ao interpretarem os erros dos alunos, sendo necessário, ainda, examinar como esse conhecimento poderia se traduzir em ações didáticas que viessem favorecer a superação das dificuldades identificadas (estudo em andamento).

## Referências

- ASTOLFI, J. P. **El "error", un medio para enseñar.** Sevilla: Díada, 1999. (Coleção "Investigación y Enseñanza").
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Educacion**, London, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BESSOT, A. Analyse d'erreurs dans l'utilisation de la suite des nombres par les enfants de 1<sup>ère</sup> année de l'enseignement obligatoire en France ou cours préparatoire. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4th, 1980, Berkeley. **Proceedings...** Berkeley: ICME, 1983, v. 4, p. 474-476.
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.** Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BOTELHO, D. et al. Análise do erro na resolução de problemas verbais de estrutura aditiva. Uma perspectiva construtivista. In: SIMÕES, M. C. T. et al. (Orgs.), **Psicologia do desenvolvimento: temas de investigação.** Coimbra: Almedina, 2006, p 53-76.
- BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Bolema**, Rio Claro, n. 33, p. 69-96, 2009.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. [238 f.]. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Análise dos resultados do pré-teste da Provinha Brasil de Matemática. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 24, p. 100-117, 2013.

CASÁVOLA, H. M. O papel construtivo dos erros na aquisição dos conhecimentos: contribuição para uma teoria das aprendizagens. In: CASTORINA, J. A. et al., **Psicologia genética**: aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Tradução de C. E. A. Di Piero. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988. p. 32-44.

CURY, H. N. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. [276 f.]. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. “Professora, eu só errei o sinal!”: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: \_\_\_\_\_. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.111-138.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Orgs.). **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012. p. 19-48.

DE LA TORRE, S. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DEL PUERTO, S. M.; MINAARD, C. L.; SEMINARA, S. A. Análisis de los errores: una valiosa frente de información acerca de la aprendizaje de las matemáticas. **Revista Ibero-Americana de Educación**, [Madrid], v. 38, n. 4, 2006. Disponível em: <<http://www.rieoei.org/1285.htm>>. Acesso em: 15 abr. 2006.

GITIRANA, V et al. **Repensando Multiplicação e Divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: Proem, 2014.

GÓMEZ, A. B. Tipología de los errores en el cálculo mental: um estudio en el contexto educativo. **Enseñanza de las Ciencias**, [Vigo], v. 13, n. 3, p. 313-325, 1995.

KOCH, N. T. O.; SOARES, M. T. C. O professor, seus alunos e a resolução de problemas de estrutura aditiva. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. (Orgs.). **Desenhos, palavras e números**: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Editora UFPR, 2005. p.145-182.

MOREN, E. B. S.; DAVID, M. M. M. S; MACHADO, M. P. L. Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino-aprendizagem. **Cadernos de Pesquisa**, [São Paulo], n. 83, p. 43-51, 1992.

MORO, M. L. F; SOARES, M. T. C. Aprendizagem de estruturas aditivas elementares - alunos, professores e pesquisadores como parceiros de uma construção conceitual. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Editora Alínea, 2006, p. 135- 162.

OLIVEIRA, L. K. M.; FRANCO, F. C.; SOARES, T. M. Projeto Geres /2005: novos indicadores para construção e interpretação da escala de proficiência. **Reice** - Revista Electrónica Iberoamericana sobre



Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, [Madrid], p. 154-182, 2005. Disponível em: <  
<http://www.rinace.net/arts/vol5num2e/art11.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2007.

OROZCO-HORMAZA, M. O. Os erros sintáticos das crianças ao aprender a escrita dos numerais. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. (Org.). **Desenhos, palavras e números**: as marcas da matemática na escola. Curitiba: Editora UFPR, 2005, p.77-106.

ORTIGÃO, M. I. R.; AGUIAR, G. Repetência escolar nos anos iniciais do ensino fundamental: evidências a partir dos dados da Prova Brasil 2009. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, n. 94, p. 364-389, 2013.

PENG, A.; LUO, Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. **For the Learning of Mathematics**, [Fredericton], v. 29, n. 3, p. 22-25, 2009.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

RADATZ, H. Error analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, [Reston], v. 10, n. 2, p. 163-172, 1979.

SANTOS, J. R. V. dos; BURIASCO, R. L. C. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. In: BURIASCO, R. L. C. de (Org.). **Avaliação e educação matemática**. Recife: Sbem, 2008. p. 87-108.

SPINILLO, A. G. et al. O erro no processo de ensino aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim Gepem**, [Seropédica], n. 64, p. 1-12, 2014.

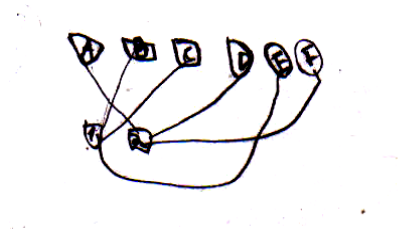
VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics**: concepts and processes. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de M. L. F. Moro. ed. rev. Curitiba: Editora da UFPR, 2014.

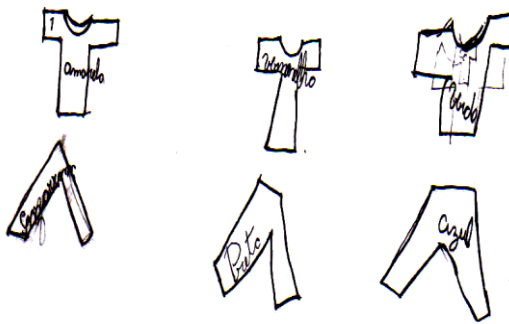
**Submetido em Junho de 2015.**  
**Aprovado em Março de 2016.**

## Apêndice A: Problemas de produto de medidas

Problema 1: Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas, Daniela pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair do parque?



Problema 2: Pedro tem 3 camisetas (vermelha, amarela e verde) e 5 bermudas (marrom, laranja, preta, azul e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?



Problema 3: Combinando as blusas e as calças, Maria pode formar 20 conjuntos diferentes. O desenho abaixo mostra que ela tem 5 blusas. Quantas calças ela tem?



Local para fazer o cálculo e, se quiser, também desenhar	Resposta:
$\begin{array}{r} 20 \\ + 5 \\ \hline 25 \end{array}$	<u>25 conjuntos</u>

## Apêndice B: Problemas de isomorfismo de medidas

Problema 4: Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias este tratamento vai durar?

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também <u>desenhar</u>	Resposta:
$\begin{array}{r} 32 \\ + 4 \\ \hline 36 \end{array}$	$\underline{36 \text{ dias}}$

Problema 5: Uma floricultura vende caixas de jarros com flores. Cada caixa tem 6 jarros. Por sua vez, cada jarro vem com 2 flores. Sandra comprou 3 caixas. Quantas flores ela levou?

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também <u>desenhar</u>	Resposta:
$\begin{array}{r} 6 \\ + 2 \\ + 3 \\ \hline 11 \end{array}$	$\underline{11 \text{ FLORES}}$

Problema 6: Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos?

Local para fazer o cálculo e, se quiser, também <u>desenhar</u>	Resposta:
$\begin{array}{r} 15 \\ + 3 \\ \hline 18 \end{array}$	