



Como representar um piso quadriculado: história da perspectiva e ensino de geometria¹²

How to Represent a Checkered Floor: the history of perspective and teaching of geometry

Cláudia Regina Flores³

Méricles Thadeu Moretti⁴

Resumo

Este artigo traz reflexões sobre a técnica da representação em perspectiva e a história desta técnica. A partir da representação de um quadriculado em perspectiva, três são os exemplos históricos trabalhados aqui: a regra dos dois terços, a construção de Alberti, a justa proporção de Piero della Francesca. A exploração destes exemplos históricos permitirá não só o contato com a história da invenção do espaço em perspectiva, portanto da técnica da perspectiva, mas também de conhecimentos geométricos necessários para tais construções. Ainda, a passagem por estes modos de representação permite perceber formas variadas de representação do espaço, o que implica na percepção de que o próprio espaço é construído. Isto para auxiliar na significação dos conceitos matemáticos envolvidos, bem como na elaboração de procedimentos metodológicos para o trabalho de sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática. Perspectiva. História da Perspectiva. Ensino de Geometria. Representação.

Abstract

This paper presents some reflections about the technique of representing perspective and the history of this technique. Starting from the representation of a checkered floor in perspective, three examples are discussed: the two-thirds rule, Alberti's construction, and the Piero della Francesca's just proportion. The exploration of these historical examples will permit not only the contact with the history of the invention of space in perspective, and therefore the technique of perspective, but also of the geometrical knowledge needed for these constructions. Furthermore, the visit to these modes of representation allows one to perceive various ways of representing space, which implies the perception that space itself is constructed. This can help to attribute meaning to the mathematical concepts involved, as well as the elaboration of methodological procedures for classroom work.

Keywords: Mathematical Education. Perspective. History of Perspective. Geometry Teaching. Representation.

¹ Digitalizado por Douglas Marin e Luciano Feliciano de Lima.

² O presente trabalho teve o apoio do CNPq.

³ Professora do Departamento de Metodologia/CED/UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC.

Endereço para correspondências: Rua Servidão Laje de Pedra, 171. Itacorubi, Florianópolis, SC, Brasil. CEP 88034-605. crf@mbox1.ufsc.br.

⁴ Professor do Departamento de Matemática/CFM/UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC.

Endereço para correspondências: Rua João Jorge Mussi, 248. Carianos, Florianópolis, SC, Brasil. CEP 88047-510. mericles@mtm.ufsc.br.

Introdução

Entre os primeiros exemplos de representação do espaço em perspectiva aparece, nas artes plásticas, a figuração de um piso quadriculado. É interessante notar, em muitas das obras do fim do século XIV e início do século XV, como o fundo quadriculado serviu de suporte de representação para os artistas realizarem sua pintura. A obra de Lorenzetti, *L'Annocination* (Fig.01), é um exemplo.

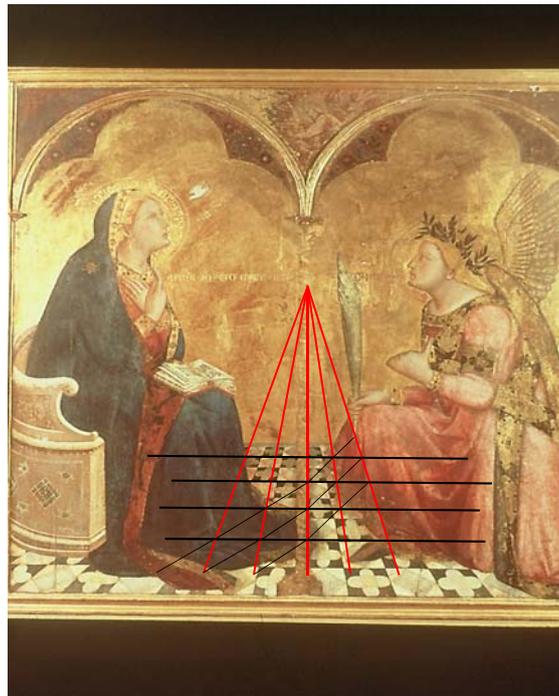


Fig.01

Ver como era feito isso, ou seja, como se construiu uma técnica que possibilitava esta representação, permite não só estabelecer contato com a história da representação do espaço em perspectiva, mas também abordar, na sala de aula, a linguagem do desenho em perspectiva, ou seja, suas convenções de representação de uma figura em três dimensões sobre o plano.

A técnica da perspectiva teve sua emergência no Renascimento italiano, quando a representação pretendia ser uma imagem especular⁵ do mundo. Com o Renascimento instituiu-se um novo modo de ser e de pensar, onde o conceito de homem não designa mais um ser contemplativo, mas um homem ativo, ou seja, o homem passou a ser considerado como primordialmente um ser consciente e dotado de razão. Fatos históricos, como por exemplo, a desapropriação das terras eclesiásticas e monásticas, ou seja, a Reforma, permitindo ao homem o enriquecimento e, conseqüentemente, a valorização do seu Eu interior; a descoberta da América, instigando o mapeamento das terras e o levantamento cartográfico dos mares, mostram, segundo Arendt (1987), o campo sob o qual se configurou este novo ideal de homem.

Então, o homem moderno passa a ser aquele que pensa, reflete, analisa, planeja e que, portanto, projeta, racionaliza o espaço e os objetos no espaço. Isso instigou os artistas plásticos da época a criarem uma técnica que possibilitasse uma representação do espaço e das coisas no espaço de acordo com o novo modo de ver e de se relacionar com o mundo.

A técnica da perspectiva central tornou-se enfim, a técnica que subsiste na representação moderna de imagens tridimensionais, ganhando corpo teórico por estar de acordo com as novas demandas e concepções de representação do espaço e das coisas no espaço. É esta técnica que possibilita

[...] a designação de um ponto de vista absolutamente fixo, aquele às vezes do pintor e do espectador; a obrigatoriedade da visão monocular; a homogeneização do espaço representacional; a coincidência projetiva do ponto de vista e do ponto de fuga, [...] (HAVALANGE, 1998, p. 249).

Trazer a história da perspectiva para os espaços de educação, seja para a formação do professor, seja para o trabalho em sala de aula com o aluno, significa oportunizar não só o conhecimento dos processos pelos quais se criaram modos de representar, mas também possibilitar condições de se estabelecer uma relação com a própria produção dos conhecimentos matemáticos envolvidos. Questionar, no ensino de geometria, como é possível representar sobre uma superfície plana aquilo que se

⁵ A idéia de que a imagem pintada seria a semelhança do real, cópia fiel da realidade, surge em contraposição com a idéia de que as imagens deveriam desempenhar um papel de narrativa, de ensinamentos religiosos, pregada na Idade Média. Com o Humanismo, o Renascimento instituiu novas formas de ver o mundo, o homem e as relações do homem com este mundo. Isto não significa que o Renascimento rompeu drasticamente com o

apresenta diante dos olhos, vai permitir o contato com a história da técnica da perspectiva, bem como com os conhecimentos geométricos que a permeiam. Uma abordagem histórica no ensino significa, portanto, trabalhar tanto o objeto matemático, como os diversos aspectos que levaram à construção deste objeto (FLORES, 2002).

Este artigo discute, então, aspectos da história da perspectiva, bem como da elaboração conceitual da técnica da perspectiva, a fim de auxiliar, com novas propostas metodológicas da história na educação matemática. Portanto, restringindo-se à representação de um piso quadriculado em perspectiva, três são os exemplos históricos trabalhados aqui: a regra dos dois terços, a construção de Alberti, a justa proporção de Piero della Francesca. Além do contato com os conceitos geométricos necessários para tais construções, a passagem por estes modos de representação permite perceber formas variadas de representação do espaço, portanto, de ver que o próprio espaço é construído. Acredita-se que o conhecimento desta face da história pode auxiliar e, até mesmo, fornecer subsídios para a elaboração de estratégias metodológicas que pontuem a história na educação matemática.

A regra dos dois terços

Em se tratando de obras plásticas, particularmente o volume dos objetos, a profundidade do espaço, a composição artística organizada a partir de um ponto de fuga são características representacionais que não são encontradas, segundo historiadores da arte, antes do fim do século XIV e início do século XV. Tais características começam a ser percebidas no início do Renascimento, como é o caso da *L'Annonciation* (Fig.01), de Lorenzetti, que mantém uma convergência rigorosa das perpendiculares ao plano do quadro a um ponto único, ponto de fuga. Segundo Panofsky (1993), esta obra constitui-se como um exemplo primeiro, na história da arte italiana, de representação do espaço em perspectiva.

Para se ter uma melhor representação dos objetos, dos objetos no espaço e do espaço, ou seja, para que a representação simulasse o real, já que este era o ideal da época, era preciso métodos, técnicas, mesmo rudimentares, que permitissem uma proximidade entre representação e realidade. Então, um chão ladrilhado ou um teto

modo anterior de pensar, mas que novas formas surgiram e, entre elas, a questão da imagem como retrato fiel

quadriculado era, muitas vezes, o meio pelo qual se tentava dar à imagem o aspecto real. A propriedade segundo a qual as perpendiculares ao plano do quadro convergem para um ponto, chamado mais tarde de ponto de fuga central, era admitida. Assim, um solo quadriculado, cuja composição é feita de paralelas e de perpendiculares à linha de base do quadro, era representado de maneira que a aparência das perpendiculares concorresse a um ponto situado numa linha na altura do horizonte (Fig.01).

Para obter o espaçamento entre uma paralela e outra, nota-se o emprego da redução regular, numa relação constante, dos afastamentos sucessivos das paralelas. Recorrendo-se às progressões numéricas conhecidas, fazia-se, a partir do primeiro afastamento entre a linha de base do quadro e a primeira paralela a esta linha, uma seqüência de paralelas utilizando-se um coeficiente constante. Normalmente era utilizado o coeficiente $\frac{2}{3}$; daí segue, modernamente, o nome de ‘regra dos dois terços’ (Fig. 02).

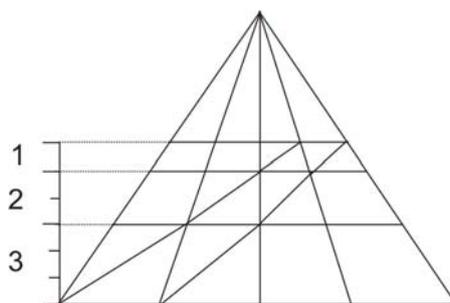


Fig.02

No entanto, notemos na figura que este procedimento não conserva o alinhamento das diagonais, o que pode, também, ser notado na obra de Lorenzetti (Fig.01). Este fato teria sido observado e criticado, na época, por artistas, particularmente por Leon Battista Alberti. Mas, o importante nisto tudo é ver que para se chegar a um procedimento tido como “correto” foram necessárias tentativas, discussões, descartes e, sobretudo, que a configuração de uma base quadriculada em profundidade, na qual serão representados personagens e objetos da cena, constituiu-se como um destes primeiros modos de representação tridimensional.

da realidade.

Para além da discussão dos aspectos históricos, vejamos agora a atividade a seguir:

A regra dos dois terços: no Trecento (século XIV e até por volta de 1435), os pintores tinham o hábito de utilizar um coeficiente de encurtamento de $\frac{2}{3}$. Efetue uma tal construção de um quadrilátero com 16 quadrados de lado 1. Trace as diagonais de cada quadrado obtido. O que você observa?

Esta atividade é oriunda do trabalho de Brin, Grégoire e Hallez (1993, p.200), um projeto que teve a intenção de lidar com textos históricos em sala de aula para alunos franceses. Analisemos, portanto, as possibilidades de tal atividade no ensino de geometria.

O modo de representação proposto não conserva o alinhamento das diagonais, fato que pode ser observado para qualquer que seja a seqüência geométrica escolhida. Assim, a atividade poderia ser problematizada a partir desta percepção.

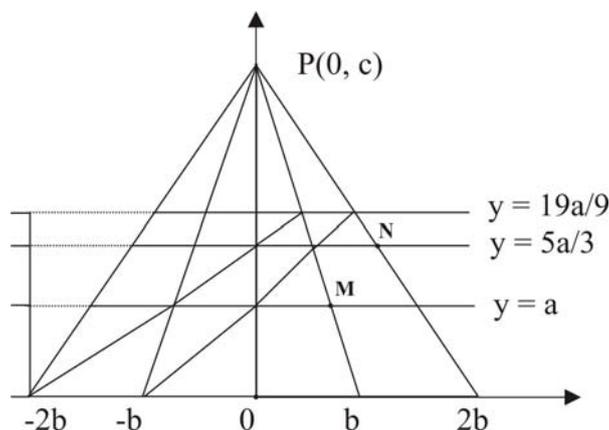
Ainda, dependendo da escolha para o afastamento inicial, pode-se verificar uma diversidade de inclinações. Há uma mudança nessa inclinação quando o afastamento inicial é, por exemplo, ligeiramente superior a $\frac{1}{5}$ da distância da primeira paralela ao ponto de fuga principal. O interessante nisto é que, ao percebermos que as diagonais do quadriculado não permanecem alinhadas, põe-se em questão o entendimento conceitual de diagonal.

Portanto, além de se tratar de conceitos geométricos em torno da proporcionalidade, a atividade nos põe a par das dificuldades, das escolhas e das invenções técnicas de artistas para a obtenção de um espaço que se apresente com a terceira dimensão.

Vejamos ainda uma outra atividade:

Demonstrar que, de fato, mediante a regra de três, as diagonais dos pequenos quadrados não ficam alinhadas.

Uma sugestão de resolução poderia ser o uso do sistema de eixos posicionados e dimensões dadas conforme são mostrados no desenho a seguir.



Neste caso, é preciso verificar, por exemplo, que a inclinação do segmento de reta \overline{OM} não é a mesma do segmento de reta \overline{MN} .

O interessante desta atividade é que ela não se restringe somente à verificação do fato de que as diagonais dos quadrados não estão alinhadas, mas abre a possibilidade de trabalhar conceitos sobre a inclinação de retas, a resolução de sistemas, além de reforçar a importância do sistema cartesiano na resolução do problema. Notemos que o sistema cartesiano, mesmo não sendo visível na aplicação da regra dos $\frac{2}{3}$, no exercício em questão, mostrou-se um artifício heurístico fundamental para sua resolução.

O método de Alberti

O método dos dois terços é criticado por Leon Battista Alberti em seu tratado de perspectiva intitulado *De Pictura*, publicado em 1435⁶. Neste tratado Alberti define, pela primeira vez, a teoria da perspectiva numa linguagem mais geométrica, porém voltada para os artistas. Ele fornece um outro método, denominado posteriormente como a “construção legítima”, que possibilita a construção perspectiva de um piso quadriculado sem as deformações do método dos dois terços, ou seja, as diagonais do quadriculado agora serão alinhadas.

⁶ ALBERTI, Leon Battista. *De Pictura* (1435). Tradução francesa de Jean-Louis Schefer. Paris: Macula Dédale, 1992.

Segundo o método de Alberti⁷, marca-se, inicialmente, um ponto central (P) que deve estar na altura dos olhos do observador que está fora do quadro, e traça-se a linha de terra (interseção do plano do quadro com o plano do solo), que é onde ficam os pés deste mesmo observador. Divide-se a linha de terra em partes iguais e, em seguida, traçam-se as perpendiculares ao plano do quadro, as quais deverão convergir para o ponto de fuga principal (P). Traça-se uma reta (d), que deve ser perpendicular à linha de terra, e marca-se um ponto (P') na mesma altura do ponto central (P) e cuja distância da perpendicular (d) é igual à distância do olho ao quadro.

Deste ponto (P') traçam-se retas que passam pelos pés das perpendiculares ao quadro obtendo-se, assim, as interseções com a reta (d) e, portanto, as alturas por onde devem passar as paralelas⁸.

Pode-se verificar, então, que todas as diagonais dos quadriláteros estão agora alinhadas. (Fig.03).

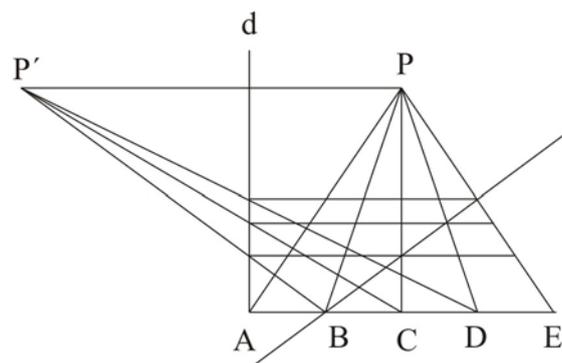
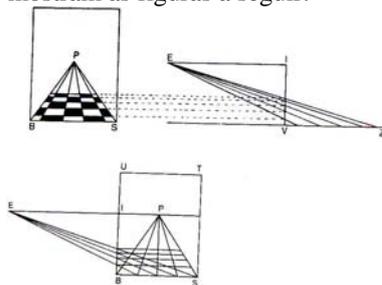


Fig.03

⁷ Para um estudo mais aprofundado do método de Alberti pode-se consultar, por exemplo, Panofsky (1981), Panofsky (1993), Flocon e Taton (1994), Bessot e Le Goff (1993).

⁸ Esta é uma abreviação do método de Alberti segundo Brin, Grégoire e Hallez (1993). Na verdade, Alberti, para obter o lugar “certo” por onde devem passar as paralelas ao plano do quadro sugere dois esquemas, um de plano e outro de elevação, como mostram as figuras a seguir:

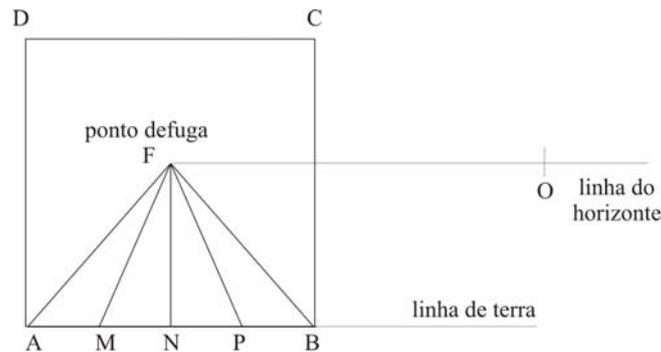


Para entender os procedimentos da regra de Alberti, vejamos a atividade a seguir:

Completar a figura abaixo com a ajuda do método seguinte:

1º) juntar os pontos A, M, N, P, B ao ponto O e marcar os pontos de interseção das retas obtidas com a reta BC;

2º) traçar as paralelas a linha de terra passando pelos obtidos no 1º. (BRIN; GRÉGOIRE; HALLEZ, 1993, p.200).



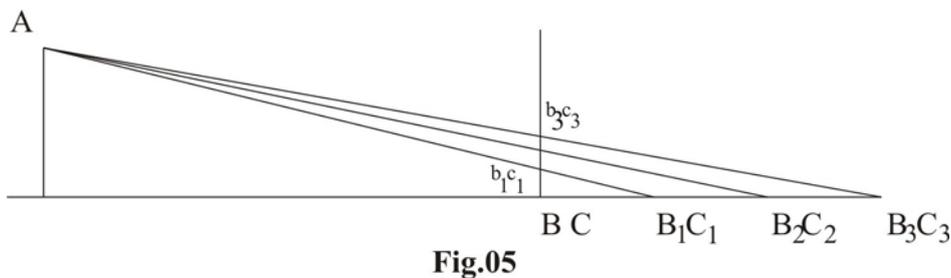
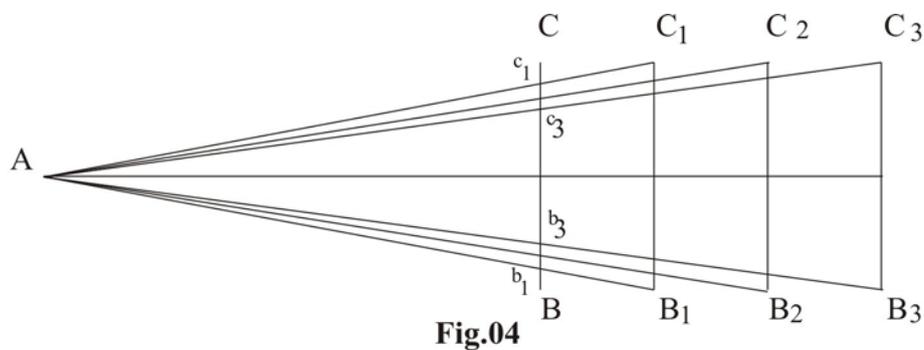
Notemos que o método de Alberti não usa coeficientes numéricos para diminuir progressivamente o desenho do quadriculado. Os conhecimentos geométricos, presentes neste método, se limitam à idéia de que a representação se dá através da pirâmide visual, cujo cume é o olho, e, as arestas são os raios visuais fictícios levados do olho aos diversos pontos do contorno do objeto representado.

Mas, a forma como conceitos e técnicas vão sendo trabalhados dão à representação uma nova forma, racional, sob a qual os objetos da cena serão projetados. Ver como os artistas, os arquitetos renascentistas resolviam seus problemas de representação pictural, nos auxilia a compreender a concepção de espaço que foi sendo criada e como foram sendo criados modos de representar este espaço. Para um espaço construído, cuidadosamente calculado, medido, racionalizado, a técnica da perspectiva fez-se como o suporte da representação.

A justa proporção de Piero della Francesca

Em um tratado de perspectiva intitulado *De prospectiva pingendi*, escrito por Piero della Francesca em 1470, encontra-se, uma vez mais, a crítica de que a regra da

proporção dos $\frac{2}{3}$ não é correta para colocar a imagem em perspectiva. Numa proposição⁹ do Livro I deste tratado de perspectiva, Piero della Francesca afirma, com a ajuda de uma figura vista de cima (Fig. 04), que o coeficiente de diminuição não é constante e, além disso, ele depende da distância do olho ao quadro e da distância do olho à coisa vista. Por exemplo, se a distância do olho ao quadro é de quatro braças¹⁰ e o quadrilátero a ser perspectivado é dividido em partes iguais de 1 braça, as relações de proporção para a degradação da aparência do lado deste quadrilátero são $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \dots$ (Fig. 04 e 05).

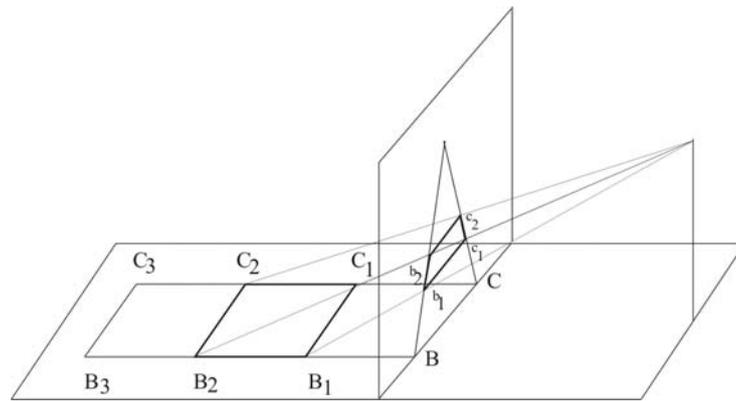


A atividade a seguir poderá auxiliar na compreensão do método e dos procedimentos matemáticos de Piero della Francesca.

Completar a figura abaixo, desenhada em perspectiva cavaleira, na qual o ponto A representa o olho do pintor ou do observador, T o plano do quadro, G o plano do solo (dito geometral) sobre o qual é inscrito um quadrilátero $BCB_1C_1B_2C_2$ representado em $BCb_1c_1b_2c_2$ sobre o quadro.

⁹ Esta proposição pode ser analisada com detalhes no tratado de Piero della Francesca (1998, p.55), com tradução francesa de Le Goff.

¹⁰ Antiga unidade de medida de comprimento, utilizada por Piero della Francesca, equivalente a 10 palmos, ou seja, aproximadamente 2,2m. No sistema inglês esta unidade equivale aproximadamente a 1,8m.



- a) Sobre a figura acima situar os pontos b'_1 , c'_1 , b'_2 , c'_2 utilizando a figura vista de cima conforme sugere a regra de Piero della Francesca. Mostrar que $b_1c_1=b'_1c'_1$ e $b_2c_2=b'_2c'_2$ etc.
- b) Mostrar, utilizando a figura vista de cima sugerida pela regra de Piero della Francesca, que a distância do olho ao quadro é de 4 unidades de medida encontrando para estas relações as proporções indicadas por Piero: $BC/b_1=105/84$, $b_1c_1/b_2c_2=84/70$ etc. Calcular estas relações para um valor d qualquer da distância do olho ao quadro. (BRIN; GRÉGOIRE; HALLEZ, 1993, p.202).

Esta atividade nos permite ver que o método de Piero della Francesca é pautado, basicamente, nas relações de proporções. O que se pretende é representar o piso quadriculado numa forma perspectiva, ou seja, a representação deste piso deverá sofrer uma deformação. Porém, tal deformação deverá nos dar a sensação de que a representação é fiel à imagem real. Então, se supusermos que os quadrados têm lado 1 de medida, e sendo d a distância do olho ao quadro, a relação para obter a aparência de redução do lado do $(n+1)$ -ésimo quadrado com a aparência do lado do n -ésimo quadrado será de $\frac{d+n+1}{d+n}$.

Compreender o método de Piero della Francesca significa perceber que uma das formas de desenhar as coisas em sua forma própria impõe a necessidade de passar antes pelos cálculos matemáticos associados à geometria. O ideal da representação perfeita é de se chegar numa imagem especular, seja de personagens, seja de objetos ou da natureza.

Conclusão

Há muitos modos de representar no plano uma figura vista no espaço. Mesmo a técnica da perspectiva moderna, ou seja, a técnica que se constitui como o modo de representação usual, tem seus desmembramentos, multiplicidades e variantes; as perspectivas paralelas são uma delas. Em particular, os três modos de representação em perspectiva, analisados aqui, exemplos de aplicação da perspectiva central, fazem parte do fundamento da teoria da perspectiva.

Com o foco na representação de um piso quadriculado buscou-se, então, separar um dos fios que tecem a história da perspectiva. Ao analisar métodos empregados por artistas e arquitetos, para construir uma representação de um piso quadriculado que servisse de apoio para desenhar os objetos e os personagens de uma cena, viu-se que foi preciso determinar uma redução, numa certa direção, da representação dos quadrados, e que, para tanto, foi preciso geometria e matemática. A deformação na imagem representada precisaria dar a sensação de que ela é, de fato, o real. Assim, “A base quadriculada se fez como o suporte para educar, auxiliar e estruturar a leitura da representação, homogeneizar o espaço e indicar o ponto de vista” (FLORES, 2003b). Mais tarde, esta mesma base servirá de apoio para as deformações ao extremo, as anamorfoses.

Portanto, estes métodos analisados permitem o estudo de noções geométricas, entre elas as proporções numéricas, e da noção de espaço matemático construído segundo uma técnica. Vimos que, a partir de cada um destes três métodos, obtém-se a aparência perspectiva de um piso quadriculado, cuja regra enunciada por Alberti foi legitimada como “correta”, por conservar o alinhamento das diagonais do quadriculado.

Trazer a discussão da história da perspectiva para o campo da educação, particularmente da educação matemática, seja pensando na formação docente, seja pensando no tratamento histórico no ensino, significa, para além do conhecimento da histórica, ver que as regras de construção de um desenho em perspectiva são regras de convenção¹¹. E, conhecer os códigos de convenção para a representação de uma imagem significa entender por quê e como se criaram técnicas para representar no plano as

¹¹ A técnica da perspectiva, criada no Renascimento italiano, estabeleceu-se posteriormente como um modo convencional de representação iconográfica, sendo ainda hoje nosso modo de representação iconográfica.

coisas que estão no espaço. Além disso, permite a compreensão e até a aprendizagem de como olhar as imagens que representam coisas. Então, entrar na história da perspectiva permite entender como se criaram técnicas para representar e para olhar imagens (FLORES, 2003b).

Por fim, conhecer esta história nos permite analisar as dificuldades, os processos, as tentativas, os descartes, as escolhas que se empregaram para a criação e obtenção de uma técnica, a técnica da perspectiva moderna, que possibilita a representação realista do espaço e das figuras no espaço.

No que diz respeito ao uso didático e às possibilidades didáticas desta história no ensino de matemática, de geometria, há que se considerar, primeiramente, a compreensão e o significado da elaboração desta história para nós professores, pesquisadores. A partir daí é que a relevância didática encontrará caminhos para se fazer. Contudo, podemos adiantar que quanto à aprendizagem e à significação dos conhecimentos por parte dos alunos, seria necessário propor atividades didáticas problematizadoras em que eles próprios pudessem criar suas técnicas e sentir suas limitações. A problematização de hoje poderá, assim, abrir-se da discussão de ontem, ou seja, para quê, por quê e como é que se precisa, e se precisou, criar técnicas para representar, no plano, coisas que estão no espaço.

Referências

ALBERTI, L. B. **De Pictura** (1435). Tradução francesa de Jean-Louis Schefer. Paris: Macula Dédale, 1992.

ARENDDT, H. **Entre o passado e o futuro**. Tradução de Mauro W. Barbosa Almeida. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 1987.

BESSOT, D.; LE GOFF, J.P. Mais où est donc passée la troisième dimension? In: **Histoires de Problèmes, Histoires des Mathématiques**. Paris: Edition Marketing, 1993. p.199-240.

BRIN, P.; GRÉGOIRE, M.; HALLEZ, M. La naissance de la perspective au XV^{ème} siècle. In: UNIVERSITÉ D'ÉTÈ EUROPEENNE. HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DANS L'EDUCATION MATHÉMATIQUE, 1., 1993, Montpellier. **Actes...** Montpellier: IREM de Montpellier, 1993. p. 195-213.

FLORES, C. R. Abordagem histórica no ensino de matemático: o caso da representação em perspectiva. **Revista Contra-Pontos**, Itajaí, v. 1, n. 1, p. 377-388, set./dez. 2002.

Entender, portanto, a questão convencional da técnica da perspectiva, significa considerá-la em seu contexto histórico (FLORES, 2003a).

- FLORES, C. R. A problemática do desenho em perspectiva: uma questão de convenção. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, p. 81-99, jan./jun. 2003a.
- FLORES, C. R. **Olhar, Saber, Representar**: ensaios sobre a representação em perspectiva. 2003. 188f. Tese (Doutorado em Educação – Ensino de Ciências, Centro de Ciências da Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003b.
- FLOCON, A.; TATON, R. **La Perspective**. 6. ed. Paris: PUF, 1994. (Que sais-je?).
- FRANCESCA, P. della. **De prospectiva pingendi**. (1470). Florence: Éd. G. Nicco-Fasola, Sansoni, 1942. Tradução francesa de Jean-Pierre Le Goff. Paris: Medias Res, 1998.
- HAVALANGE, C. **De l’oeil et du monde. Une histoire du regard au seuil de la modernité**. Paris: Fayard, 1998.
- PANOFSKY, E. **Renascimento e Renascimento na Arte Ocidental**. Tradução de Fernando Neves. Lisboa: Editorial Presença, 1981.
- PANOFSKY, E. **A Perspectiva como Forma Simbólica**. Tradução de Elisabete Nunes. Lisboa: Edições 70, 1993.