



A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.¹

Por Sueli Liberatti Javaroni²

REIS, F. da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. 2001. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

O objetivo desta tese de doutorado foi compreender como a relação da tensão entre rigor e intuição acontece e se manifesta no ensino universitário de Cálculo e de Análise.

O autor inicia seu trabalho fazendo uma breve história de sua trajetória acadêmica, desde a graduação, e de sua atuação como docente. Durante a realização de seu mestrado em Matemática, ingressou como docente na UFOP, onde iniciou suas atividades no ensino superior, lecionando Cálculo para os cursos de Farmácia e Engenharias (civil, metalúrgica, geológica e de minas). Questionamentos sobre o que ensinar, como ensinar e para que serviam seus ensinamentos, faziam-se cada vez mais frequentes nas reflexões sobre sua prática cotidiana.

Analisando seus índices de reprovação, Reis os atribuía à má preparação dos alunos egressos do vestibular. Constatou que essa justificativa era também admitida por muitos professores de Cálculo. Entretanto, segundo ele, na visão discente as maiores deficiências encontram-se no ensino, na forma de como o professor produz a prática pedagógica.

Além de ministrar disciplinas como Cálculo Avançado I e II, também coordenou o curso de Especialização em Matemática, oferecido pelo seu departamento, para

¹ Digitalizado por Douglas Marin e Luciano Feliciano de Lima.

² Docente do Departamento de Matemática da FC, UNESP, Bauru e doutoranda em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP.

Endereço para correspondência: Depto. de Matemática - Faculdade de Ciências - UNESP - Câmpus de Bauru.

Av. Luis Edmundo Carrijo Coube, S/N. Bauru, SP, Brasil. CEP 17033-360. suelij@fc.unesp.br.

professores de matemática da rede pública do estado de Minas Gerais. Estas experiências fizeram-no refletir sobre questões como: seria a Análise Real fundamental para a formação do professor universitário ou do ensino médio? Ou ainda, seria aquela Análise constituída por teoremas e demonstrações? A partir dessas experiências de trabalhar e coordenar um curso de formação continuada de professores de matemática atuantes no ensino básico, e sentindo as dificuldades dos professores em discutir com profundidade questões que envolvem Análise, começou a direcionar uma mudança na sua vida acadêmica.

Ingressou, em 1997, no doutorado em Educação, área de concentração em Educação Matemática, da Faculdade de Educação da UNICAMP, sob orientação de Dario Fiorentini, com o projeto intitulado “O papel do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Real na Formação do Pensamento Matemático”, o qual deu origem a sua tese.

Na sequência, apresenta elementos para problematizar sua pergunta de pesquisa. Utiliza a definição de Becker para classificar a prática docente. Afirma que o professor tende a encaminhar o processo de ensino/aprendizagem sob uma das seguintes formas: a epistemologia empirista, isto é, a pedagogia centrada no professor, que tende a valorizar as relações hierárquicas, em nome da transmissão do conhecimento; a epistemologia apriorista, ou seja, a pedagogia centrada no aluno, que pretende confrontar o modelo anterior, atribuindo ao aluno responsabilidades que ele não tem, tais como: o domínio do conhecimento sistematizado em determinadas áreas e capacidade de abstração suficiente, e a epistemologia construtivista, centrada na relação, que tende a desabsolutizar os pólos da relação pedagógica.

Analisando a prática pedagógica de uma grande parte de professores de Cálculo, entre os quais se incluiu até o início desta pesquisa, Reis concluiu que a epistemologia construtivista é a forma menos adotada no encaminhamento do processo de ensino/aprendizagem de Cálculo e, possivelmente, de várias disciplinas de conteúdo matemático.

Sugere a existência de um processo cíclico, onde o professor universitário forma os professores do ensino básico, os quais são os responsáveis pela formação do aluno. Assim o aluno é mal formado pelo professor, que foi mal formado pelo ensino superior. Explicita que não é objetivo de sua tese analisar especificamente este problema e cita

ações de diversos grupos de professores de Cálculo de universidades brasileiras que, através de inovações pedagógicas, buscam elementos que possam contribuir efetivamente para esta discussão.

Outro ponto importante refere-se aos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, que são parte integrante de vários cursos distintos, como, por exemplo, Engenharia, Física, Economia e Farmácia, além obviamente da Matemática. Como prática comum, os professores utilizam o mesmo conteúdo e a mesma metodologia nestes diferentes cursos.

Contrário a esta prática, Reis argumenta que cada um desses cursos profissionalizantes exige do professor uma transposição didática própria, a fim de que a produção de significados das idéias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso.

O pesquisador direciona seu trabalho no ensino de Cálculo para o Curso de Licenciatura em Matemática, abordando também o ensino de Análise Real, com o objetivo de discutir a relação entre o rigor e a intuição, o que considera crucial no ensino destas disciplinas. Justifica a escolha da licenciatura, pois somente em cursos de Matemática tem-se a disciplina Análise Real.

Argumenta que os tópicos fundamentais do curso de Análise são os mesmos que os de um curso de Cálculo, porém os tópicos abordados neste último têm uma perspectiva aplicada, com a interpretação intuitiva das definições. No curso de Análise, eles são abordados sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos objetos estudados.

Então, tomando como base sua prática profissional de Cálculo e de Análise, e frente aos seus estudos, assume que existe uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e de Análise. Assim, seu objetivo central é compreender como a relação de tensão entre rigor e intuição acontece e se manifesta no ensino de Cálculo e de Análise, no Brasil. Com esse intuito, formulou sua pergunta de pesquisa:

Como a relação entre rigor e intuição encontra-se nos manuais didáticos de Cálculo e de Análise, como ela é percebida/enfrentada pelos seus autores e pesquisadores e quais são as suas possíveis implicações na formação matemática do professor?

Para o desenvolvimento de sua pesquisa, buscou aportes teóricos basicamente em duas fontes: nos estudos históricos e filosóficos sobre o desenvolvimento do Cálculo

e da Análise e seus reflexos no ensino destas disciplinas, e na literatura recente sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem destas disciplinas, o que apresenta nos capítulos dois, três e quatro de sua tese.

Acreditando que sua questão central de pesquisa está relacionada aos aspectos históricos, filosóficos, epistemológicos e pedagógicos relacionados ao ensino e aprendizagem das disciplinas em questão, sua busca de respostas será mais eficiente e melhor consolidada a partir da análise de uma série de dados de natureza qualitativa, proporcionados pelos manuais didáticos e pelo ponto de vista de autores da área que, de certa forma, são co-responsáveis pelo currículo público dessas disciplinas, na medida em que seus livros são adotados nos cursos de graduação.

Segundo Reis, analisando tanto histórica quanto pedagogicamente, um dos pontos mais críticos da tensão ocorre no desenvolvimento dos conceitos de limites e continuidade. Portanto, tanto a análise dos livros didáticos quanto as entrevistas com os autores terão como núcleo central os conceitos de limite e de continuidade.

Para a escolha dos livros didáticos, utilizou dois critérios básicos que julgou pertinente. O livro escolhido deveria ser um livro que, na ocasião, fosse adotado em um número considerável de cursos de graduação brasileira e/ou os autores deveriam, de alguma forma, estar ligados à sua pesquisa.

Os livros didáticos de Cálculo escolhidos foram: O Cálculo com Geometria Analítica de Louis Leithold, Cálculo com Geometria Analítica de Earl W. Swokowski, Cálculo A de Diva M. Flemming e Miriam B. Gonçalves e Cálculo com Geometria Analítica de C. H. Edwards Jr. e D. E. Penney. O autor analisa cada um destes e salienta que considera o livro de Edwards e Penney realmente inovador, escrito por autores conscientes de que um bom manual didático para o ensino de Cálculo deve conter não só uma apresentação visual cativante e elucidativa dos conteúdos, mas, principalmente, uma abordagem exploratória e problematizadora dos conteúdos, sob a mediação de novas tecnologias.

Ainda foram analisados os livros didáticos do professor Geraldo Ávila, cuja escolha se fez em razão do referido professor ser, possivelmente, o único autor brasileiro (na ocasião de sua pesquisa) de livros didáticos das duas áreas em questão. Selecionou assim os livros: Cálculo I, Introdução ao Cálculo, Introdução às funções e à derivada, e Introdução à Análise Matemática. Observa que, no âmbito nacional, o livro

Introdução às funções e à derivada é um dos raríssimos livros dedicados especificamente ao ensino de Cálculo no ensino médio. Além destes, também foram analisados os livros: Conceitos Fundamentais da Matemática, de Bento de J. Caraça; Princípios da Análise Matemática, de Walter Rudin; Análise I, de Djairo G. de Figueiredo; e Análise Real, de Elon Lages Lima. Como já observado anteriormente, a escolha dos livros foi orientada no sentido de serem referências bibliográficas conceituadas nos cursos de Matemática na graduação brasileira. A análise desses manuais didáticos é realizada no capítulo cinco.

As entrevistas foram semi-diretivas ou semi-estruturadas com um roteiro prévio, sujeito a alterações por parte dos entrevistados, com cinco diretrizes: formação profissional e experiência docente, história do Cálculo e da Análise, o ensino de Cálculo, o ensino de Análise e formação de professores de Matemática. A transcrição completa das entrevistas encontra-se anexada à sua tese.

Os professores pesquisadores escolhidos para a entrevista foram Roberto Ribeiro Baldino, Geraldo Severo de Souza Ávila, Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima.

No capítulo seis, da tese de Reis, encontramos uma apresentação da trajetória de vida de cada um dos depoentes, destacando informações relativas à sua formação acadêmica e experiência docente nas disciplinas analisadas.

Os saberes profissionais do professor de Cálculo e de Análise, nas vozes dos depoentes, constituem o capítulo sete deste trabalho. Neste capítulo o autor identifica as diversas categorias de conhecimento, o conhecimento específico, o conhecimento pedagógico e o conhecimento curricular, segundo descreve Shulman. (p. 149).

Como as questões discutidas neste tópico são relativas à prática pedagógica das disciplinas em questão, o autor decidiu pela categorização dos saberes da profissão docente.

O primeiro tipo de saber que ele classifica são os saberes históricos que os entrevistados evidenciaram acerca do desenvolvimento de Cálculo e Análise. Tais saberes não se referem somente aos acontecimentos que eles julgam fundamentais em uma retrospectiva histórica, mas principalmente às relações que estabelecem com o ensino e currículo das matérias. Por exemplo, a aritmetização da Análise é vista pelo professor Baldino como uma questão de “hegemonia”, na medida em que o pensamento

geométrico, que perdurou até o século XIX, perdeu status com a tentativa da Análise algebrizar a Geometria Euclidiana. Como a Aritmética e a Análise estão relacionadas ao conceito de número, ele considera: “muito mais natural você fazer esse Cálculo, muito mais rigoroso e exato [...] pelo controle da cadeia significativa do que fazer através de geometria com desenhos [...]”. Essa relação do desenvolvimento da Análise com a substituição do pensamento geométrico, até então hegemônico, é também observada pelo professor Ávila, que relaciona a fragilidade da fundamentação da Matemática na geometria à questão da busca pelo rigor, imperativa a época.

Reis acredita, como o professor Ávila, que “as coisas ainda estão em evolução e assim, possam surgir outros modelos pautados por outros princípios e ideais”. E que este desenvolvimento de novas idéias no campo científico seja deslizado para o campo pedagógico, uma vez que a transposição didática da matemática está inequivocamente relacionada aos patamares de rigor possíveis, não somente como mostra a história da Análise, mas também como mostra seu ensino atual.

Um segundo tipo de saber do Cálculo e da Análise são os saberes epistemológicos relativos à natureza do pensamento diferencial e analítico. O autor afirma que ele tinha uma pré-concepção equivocada no início de sua pesquisa, acreditando na possibilidade de existência de um ponto de equilíbrio entre pensamento diferencial intuitivamente construído e o pensamento analítico rigorosamente construído. Como todos os seus depoentes argumentaram, esta associação não pode ser feita de forma dicotômica ou reducionista. Tanto Ávila quanto Baldino caracterizam o pensamento analítico como um pensamento que se contrapõe ao pensamento geométrico, mas isto não significa uma contraposição do pensamento rigoroso ao pensamento intuitivo, uma vez que Arquimedes, apontado por Baldino como um precursor do pensamento analítico, e do pensamento diferencial por Ávila, utilizava-se da intuição para fazer suas descobertas e apresentava um rigor refinado em suas demonstrações.

E finalmente, o terceiro tipo de saber profissional do professor é o saber pedagógico da matéria, que diz respeito às diferentes formas de representar e explorar os conteúdos, de modo a torná-los compreensíveis e significativos aos alunos. Este saber envolve conhecimento de exemplos, contra-exemplos, analogias, explicações, situações-problema e ilustrações relativas ao conteúdo de ensino.

Da interpretação dos depoimentos dos entrevistados emergiram duas categorias: os saberes profissionais do professor de Cálculo e de Análise, discutidos no capítulo sete, e a relação entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo e de Análise, apresentada no oitavo capítulo.

Em suas considerações finais, argumenta que a análise realizada nos manuais didáticos reflete uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo a primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo.

Afirma que a proposta de ensino de Cálculo apresentada é, ainda, predominantemente formalista e repleta de procedimentos. Porém argumenta que, na prática da sala de aula do Cálculo, os procedimentos e os conceitos são repletos de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Portanto, conclui que cabe a nós, professores, refletirmos sobre uma melhor utilização de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa de conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos.

No exame dos livros de Análise, destaca que rigor e formalismo são ingredientes essenciais em um curso de Análise. As diferenças encontradas nestes livros residem em uma maior ou menor utilização de noções topológicas, na alteração da ordem de apresentação ou na natureza de alguns conteúdos.

Um segundo ponto importante às suas inquietações iniciais diz respeito ao modo como os profissionais brasileiros, com larga experiência em pesquisa, ensino e produção de material didático para o ensino de Cálculo e Análise, percebem e enfrentam a relação entre o rigor e intuição no ensino da Matemática. Segundo o autor, Baldino, Djairo e Elon parecem reconhecer, de modo semelhante a Grattan-Guinness, a existência de diferentes níveis de rigor, e provavelmente também de intuição. Já Ávila parece entender a intuição e o rigor como entidades, talvez dicotômicas, que se complementam, mas que acontecem em momentos diferentes: “o rigor é importante numa fase [...] de maior amadurecimento do aluno, quando ele já tem um espírito crítico [...]”. Elon, ao criticar o uso e abuso dos épsilons e deltas num curso de Cálculo ministrado para sua filha, quando fazia biologia, parece reconhecer a existência de níveis de rigor, sobretudo quando aceita ou recomenda, dependendo do contexto, diferentes modos de justificar ou

provar. Tal flexibilidade, entretanto, parece ser reduzida quando se trata, por exemplo, de um curso de Análise, o qual deveria privilegiar o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo. Um aspecto importante que o autor levantou nas entrevistas foi que, quando se falava de rigor no ensino de Matemática, existia uma identificação entre o ensino rigoroso e o ensino formalista. Talvez esta dicotomia entre rigor e intuição, expressada em vários momentos, por alguns depoentes, seja recorrente desta identificação. Entende que um ensino formalista aceita como legítimas apenas algumas formas de rigor no tratamento dos conceitos e expressões matemáticas – aquelas fundamentadas no modelo euclidiano ou no modelo hilbertiano ou bourbakista.

A tese de Reis contribui na discussão das questões do ensino de Cálculo e de Análise, sendo por isto importante na literatura brasileira sobre o assunto. No desenvolvimento de sua tese temos um interessante desenrolar histórico das questões acerca do desenvolvimento do Cálculo e da Análise, bem como a análise de alguns dos livros clássicos do ensino destas disciplinas.

O autor foca, em sua tese, a tensão entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo e Análise no curso de Licenciatura em Matemática. No meu modo de ver, essa tensão não ocorre apenas nesse curso, mas também no curso de Bacharelado em Matemática.

Os resultados da pesquisa de Reis podem ser importantes para o Bacharelado em Matemática, já que os formandos deste curso provavelmente serão docentes que ministrarão aulas para licenciandos, bacharelados e estudantes de engenharias, dentre outros. Os argumentos utilizados por Reis ao longo de sua tese, para justificar o uso da intuição com os licenciandos, podem ser facilmente estendidos para os bacharelados em Matemática.