



Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes¹²

An Approach to Video Data Analysis to Study the Development of Learners' Mathematical Ideas and Reasoning

Arthur B. Powell; John M. Francisco; Carolyn A. Maher³

Tradução: Antonio Olimpio Junior⁴

Resumo

Examinamos a literatura sobre metodologia do videoteipe para a pesquisa observacional em Educação Matemática. Organizamos este exame apresentando questões relacionadas à coleta de dados, preocupações éticas, análise de dados, fitas como dados *versus* transcrições como dados e apresentação da pesquisa. Para lidar com a lacuna percebida na literatura, propomos um modelo para analisar dados no contexto de investigações sobre o trabalho matemático e o desenvolvimento do pensamento de estudantes engajados em investigações matemáticas. O modelo que propomos é baseado em quase duas décadas de experiências de pesquisa no *The Robert B. Davis Institute for Learning, Graduate School of Education, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, EUA*

alavras-chave: Metodologia de Vídeo. Estudos Observacionais. Desenvolvimento de Idéias Matemáticas. Desenvolvimento de Formas de Raciocínio Matemáticos. Estudo Longitudinal.

Abstract

We review the literature on videotape methodology for observational research in mathematics education. We organize the review by presenting issues related to data collection, ethical concerns, data analysis, tapes as data vs. transcripts as data, and research presentation. To address a gap we perceive in the literature, we propose a model for analyzing data in the context of investigations into the mathematical work and growth of thinking of students engaged in mathematical inquiry. The model we propose is based on nearly two decades of research experiences in The Robert B. Davis Institute for Learning, Graduate School of Education, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey.

Keywords: Video methodology. Observational studies. Development of mathematical ideas. Development of forms of mathematical reasoning. Longitudinal study.

¹ Digitalizado por Déa Nunes Fernandes Fernandes, Edna Sakon Banin e Marta Macena.

² Esta é uma versão expandida do artigo “An Evolving Analytical Model for Studying the Development of Mathematical Thinking using Videotape Data”, apresentado na conferência anual da American Educational Research Association, Seattle, WA, EUA, em 12 de abril de 2001. Apreciamos os comentários críticos – e deles nos beneficiamos – de Hanna N. Haydar, Nancy Mack, Elena Steencken, Elizabeth Uptegrove, Janet Walter, and Mark Jacobs. Agradecemos também a Robert Speiser, pelas proveitosas conversas concernentes às questões teóricas e práticas da análise de dados de videoteipes.

³ Pesquisadores do The Robert B. Davis Institute for Learning, Graduate School of Education, Rutgers University, New Jersey, EUA. Arthur B. Powell (abpowell@andromeda.rutgers.edu), John M. Francisco (jmfranci@eden.rutgers.edu), and Carolyn A. Maher (cmaher@rci.rutgers.edu)

⁴ Doutorando em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, SP.

Introdução

Este artigo descreve a base teórica para um modelo de análise de dados de videotapes, delinea cada fase do modelo e fornece exemplos do modelo em ação. Tal modelo é baseado num estudo transversal e longitudinal – que se encontra agora em seu décimo-sexto ano e é, em sua maior parte, patrocinado pela *National Science Foundation*⁵ –, sobre o desenvolvimento de idéias de um grupo focal de estudantes (DAVIS; MAHER, 1990, 1997; MAHER, 2002; MAHER; MARTINO, 1996a; MAHER; SPEISER, 1997). Por meio de experimentos de ensino, desenhados para criar ambientes de sala de aula onde a construção de sentido seja uma norma cultural, pesquisadores engajam estudantes em ramos coerentes da Matemática, onde se incluem Álgebra, Combinatória, Probabilidades e Modelagem Matemática. No curso desses experimentos, um resultado particularmente notável da cultura da construção do sentido tem sido a emergência de argumentações, justificações e a proposição de demonstrações no discurso do estudante.

Matemáticos e educadores, que assistiram aos vídeos das interações em sala de aula oriundas deste projeto, têm comentado que, a princípio, não acreditavam que crianças tão jovens pudessem raciocinar matematicamente com tal nível de sofisticação. Ao longo dos dezesseis anos da pesquisa, o Instituto para a Aprendizagem construiu um rico acervo de fotografias, áudios e vídeos. Continuamente, temos refinado nossas abordagens metodológicas e interpretativas e desenvolvido um modelo para a análise de dados em vídeo. Este refinamento tem, por sua vez, nos levado a revisitar os dados arquivados com o objetivo de produzir análises mais aprofundadas. Em consequência, temos, ao longo dos anos, produzido considerações detalhadas sobre o desenvolvimento de idéias matemáticas em estudantes individualmente, que são aprimoradas à medida que novos dados são agregados aos anteriores.

⁵ Duas subvenções da National Science Foundation apoiaram o estudo longitudinal: MDR-9053597 (dirigido por R. B. Davis and C. A. Maher) e REC-9814846 (dirigido por C. A. Maher). Quaisquer opiniões, descobertas e conclusões ou recomendações expressas neste artigo são aquelas dos autores e não necessariamente refletem as visões da National Science Foundation. Outros apoios vieram do Departamento de Educação Superior de New Jersey, da Fundação Johnson & Johnson, da Fundação de Educação da Exxon e da Fundação AT & T.

Nosso projeto de pesquisa longitudinal tem vários objetivos: (1) investigar em detalhe o desenvolvimento de idéias matemáticas pelos estudantes ao longo de vários anos; (2) fornecer estudos de caso em profundidade sobre o desenvolvimento da capacidade de justificação e de proposição de demonstrações pelos estudantes; (3) investigar o relacionamento de idéias e *insights* anteriores com justificação e produção de demonstrações posteriores. Além desses, dentro do contexto da comunidade de aprendizagem formada durante nosso projeto, temos também os seguintes objetivos: (5) investigar a natureza da intervenção do pesquisador no desenvolvimento de idéias matemáticas do estudante; e (6) estudar a cognição individual no contexto do movimento de idéias dentro desta comunidade. Finalmente, investigamos questões que emergem do trabalho com os dados nas várias fases da análise.

Para atingir este conjunto de objetivos e lidar com as questões emergentes, produzimos videoteipes de estudantes em sala de aula, em sessões fora da escola, em programas de verão e em entrevistas clínicas individuais ou em pequenos grupos. Antes de examinarmos e comentarmos nosso modelo analítico para investigar o trabalho matemático e o pensamento dos estudantes engajados na inquirição matemática, revisamos brevemente alguns textos da literatura sobre metodologia de vídeo para pesquisa em Educação Matemática.

Breve Revisão da Literatura sobre Metodologia de Vídeo

Ao longo de décadas, pesquisadores em Educação Matemática têm usado a tecnologia para capturar e estudar áudio e áudio conectado a imagens de professores e estudantes engajados em atividades matemáticas. De acordo com Erickson (1992), no âmbito da pesquisa educacional ou fora dela, o uso das tecnologias de imagens para estudar interações tem antecedentes intelectuais em várias abordagens analíticas. A abordagem da *análise de contexto*, que emergiu no começo dos anos 50, envolveu o estudo de transcrições detalhadas de “filmes cinematográficos de interações ocorrendo espontaneamente” (ibidem, p.201). Aproximadamente uma década mais tarde, a abordagem da *etnografia de comunicação* usou áudio e gravações de vídeo pra examinar a “organização do momento-a-momento das condutas de interação” (ibidem, p.203). Nos anos 50, como relata Erickson (1992, p.203), o sociólogo Goffman estudou

a própria performance, tendo, em parte, usado a “fotografia para obter *insights* de momentos significativos de interação”. Em tempos atuais, a capacidade de gravar em vídeo o desvelar momento-a-momento de sons e imagens de um fenômeno tem se transformado numa ampla e poderosa ferramenta da comunidade de pesquisa em Educação Matemática. Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas. Algumas descrições têm emergido de estudos internacionais em larga escala de vídeos de instrução em sala de aula, tais como o Estudo de Registros de Vídeo de Salas de Aula, um componente do *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) (STIGLER et al., 1999).

Na literatura relativa ao uso de dados de vídeo, para investigar atividades matemáticas de estudantes, alguns autores, implicitamente, discutem questões metodológicas relacionadas ao vídeo quando relatam resultados de suas pesquisas, enquanto outros o fazem explicitamente, levantando importantes temas teóricos e metodológicos no que tange ao uso do vídeo em pesquisa (COBB; WHITENACK, 1996; DAVIS, 1989; DAVIS; MAHER; MARTINO, 1992; HALL, 2000; LESH; LEHRER, 2000; PIRIE, 1996, 2001; ROSCHELLE, 2000). Apesar da prevalência de dados em vídeo, Hall (2000, p.647) afirma que pouco é conhecido e escrito sobre o uso dessa mídia para “coletar, assistir e interpretar o vídeo com uma fonte estável de dados para a pesquisa e para propósitos de apresentação”.

Em Educação, Ciências Médicas e Ciências Sociais, assim como em outras áreas, o videoteipe tornou-se um meio popular para capturar e arquivar dados para ambas as classes de pesquisadores – quantitativos e qualitativos – (BOTTORFF, 1994; ROSCHELLE, 2000). Metodologicamente, a tecnologia do vídeo presta-se a uma aplicação estrita ou a uma mistura de abordagens qualitativas e quantitativas tanto na coleta quanto na análise de dados. Uma razão evidente para isso é, como observa Pirie (1996, p.554) ao discutir gravações de vídeo em Educação Matemática, que filmar um fenômeno em sala de aula é provavelmente “o menos intrusivo, ainda que o mais inclusivo, meio de estudar o fenômeno”. Na próxima seção apresentaremos brevemente maneiras pelas quais os pesquisadores em ensino e aprendizagem de Matemática têm começado a teorizar sobre formas de coletar, assistir e interpretar dados de vídeo.

Coleta de Dados

O vídeo é um importante e flexível instrumento para coleta de informação oral e visual. Ele pode capturar comportamentos valiosos e interações complexas e permite aos pesquisadores reexaminar continuamente os dados (CLEMENT, 2000, p.577). Ele estende e aprimora as possibilidades da pesquisa observacional pela captura do desvelar momento-a-momento, de nuances sutis na fala e no comportamento não-verbal (MARTIN, 1999, p.79). Ele supera a limitação humana de observação por ser capaz de capturar não apenas “parte do retrato integral” (MARTIN, 1999, p.76) e é superior às notas do observador, uma vez que não envolve edição automática (MARTIN, 1999, p.81). Citando Grimshaw (1982), Bottorff (1994) nota dois potenciais principais dos registros em vídeo como fonte para a pesquisa: densidade e permanência (ibidem, p.245). A densidade reflete sua vantagem sobre um observador que, mesmo com acesso a tudo o que a câmera capta, tem dificuldade em monitorar detalhes simultâneos e diferentes dos comportamentos que se desenvolvem (ibidem, p.246). Além disso, sob a perspectiva da densidade, as gravações em vídeo capturam dois fluxos de dados – auditivo e visual – em tempo real. A noção de permanência de Bottorff será discutida mais tarde na seção de análise de dados.

Vale a pena destacar a utilização singular e a coleta de dados de vídeo do Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Seu objetivo era compreender como os professores arquitetam e implementam as aulas de Matemática de oitava série na Alemanha, Japão e Estados Unidos. Conforme tem sido reivindicado, o estudo é considerado pioneiro no uso do vídeo para a coleta, em nível nacional, de amostras de probabilidades de alguma coisa – neste caso, de ensino (STIGLER et al., 1999; STIGLER; HIEBERT, 1999, p.17). Além dos videoteipes, outros tipos de dados incluíam respostas dos professores a questionários, páginas de livros-texto e planilhas correspondentes às aulas gravadas em vídeo (STIGLER; HIEBERT, 1999, p.18). Ao final, o estudo produziu uma análise de vídeos de 231 aulas de Matemática da oitava série na Alemanha, Japão e Estados Unidos.

Embora o vídeo seja um valioso instrumento metodológico para a reunião de dados, ele não é imune a problemas. Davis (1989) discute questões metodológicas práticas – em entrevistas gravadas em vídeo – com o objetivo de sondar a compreensão e processos de pensamento de crianças, incluindo-se a produção de roteiros, experimentos piloto, dinâmica e tamanho dos grupos e técnicas de vídeo. Bottorff (1994, p.246) lista três razões pelas quais – assim como as observações humanas – os dados de vídeo são incompletos: a capacidade de ser seletivo devido a limitações mecânicas; a incapacidade de discernir o conteúdo subjetivo do comportamento que está sendo gravado; e, usualmente, a incapacidade de carregar o contexto histórico do comportamento capturado. Em direção semelhante, Hall (2000, p.663) chama a atenção “contra se tomar esta nova mídia como relativamente completa, direta ou verídica” e argumenta que dados de vídeo são carregados de teoria e de tecnologia. Ou seja, durante a coleta de dados, são feitas seleções do fenômeno que se desenvolve com base na tecnologia utilizada e nos interesses teóricos. Por sua vez, essas realidades tanto compelem quanto moldam as análises posteriores e a apresentação de resultados. Além disso, o vídeo não pode capturar tudo. Ao apontarem uma câmera de vídeo, os pesquisadores, implícita ou explicitamente, editam e escolhem exemplos quando focalizam, ou não, determinados eventos (MARTIN, 1999, p.81). Pirie (1996, p.553) enfatiza esta questão da seguinte forma: “Quem somos, onde colocamos as câmeras, e até mesmo o tipo de microfone que usamos, governam que tipo de dados obteremos e qual perderemos”.

A questão se os pesquisadores podem minimizar os vieses humanos e tecnológicos das gravações em vídeo entra em pauta. Roschelle (2000, p.726) adverte aos pesquisadores que não existem meios simples para se superar o viés do meio e que “vídeos são um registro construído”. Todavia, para se obter dados receptivos a métodos rigorosos de pesquisa, Roschelle (2000) aponta a importância de selecionar equipamento apropriado: de desenvolver técnicas competentes de videografia e de planejar e documentar estratégias sistemáticas de gravação consistentes com os propósitos claramente definidos da pesquisa. Além disso, Roschelle (2000, p. 726-727) discute detalhes técnicos e práticos na gravação de vídeos com padrão de qualidade em nível de pesquisa, onde se inclui o uso de estudos pilotos para o aprimoramento das

técnicas videográficas e o exame dos efeitos da câmera no comportamento dos participantes.

Reconhecer que as gravações em vídeo são carregadas teórica e tecnologicamente é importante para se compreender que elas, por si só, não garantem a qualidade da coleta de dados e da respectiva análise. Pesquisadores têm sugerido meios de aperfeiçoar a estreita janela, necessariamente oferecida pelo fenômeno dos vídeos, através do acréscimo das fontes de dados. Pirie (1996, p.554) recomenda juntar gravações de vídeo com o trabalho escrito dos estudantes, de maneira a se obter um exame mais inclusivo de suas atividades matemáticas. Lesh e Lehrer (2000, p.670) sugerem que dados de vídeo sejam combinados com outras fontes de dados, tais como observações etnográficas, entrevistas clínicas e experimentos de ensino.

Hall (2000, p.649) problematiza a coleta de dados incentivando cautela ao pensar as gravações de vídeo como objetivas e teoricamente neutras. Ambas as possibilidades e limitações do vídeo e da tecnologia de áudio, assim como as perspectivas teóricas do pesquisador, compelem e moldam os registros dos dados. Ele preconiza que dispositivos para capturar imagens aurais e visuais podem ser "arranjados para gravar atividade humana em formas que selecionam a interação em desenvolvimento... criando registros de dados que mostram apenas aquelas partes da interação que, com antecipação, achamos um pouco mais interessantes" (ibidem, p.659).

Questões Éticas

Capturar informações relativas a indivíduos ou grupos de indivíduos por meio do vídeo, em ambas as pesquisas quantitativas e qualitativas, introduz uma variedade de questões éticas que abarcam e vão além do consentimento pactuado. Essencialmente, o princípio do consentimento pactuado implica que os pesquisadores garantam que, em uma atividade gravada em vídeo, os participantes sejam bem informados, que compreendam o significado de suas participações, que percebam as implicações potenciais de terem suas vozes e imagens capturadas no vídeo e que consentam no uso pretendido das imagens gravadas. Roschelle (2000, p.726) sugere obter "níveis progressivos de consentimento" à medida que estes forem necessários. Isso inclui consentimento para "uso exclusivo de pequenos grupos de pesquisa", "conferências

científicas e encontros”, e “transmissão via TV, CD-ROM, ou redes de computadores”. Qualquer que seja o nível de consentimento pactuado a ser requerido, este deve ser materializado na forma escrita, especificando-se quem terá acesso aos dados e ao seu uso.

No entanto, o consentimento pactuado não necessariamente protege os que o concederam contra determinadas circunstâncias problemáticas. Tipicamente, o consentimento é dado antes que as gravações de vídeo comecem. Todavia, os técnicos podem inadvertidamente gravar um comportamento impróprio de um participante ou, como afirma Roschelle (2000, p.276): “danos a um material podem acontecer acidentalmente”. Por sua vez, Hall (2000, p.648) aponta um problema adicional que os pesquisadores defrontam no que concerne ao uso apropriado de dados de vídeo obtidos com apoio de verba pública. Como afirma este autor, uma vez acessíveis na World Wide Web, trechos de gravações podem ser redirecionados para formas que subvertem completamente o fim proposto pela pesquisa e que não levam em conta os detalhes que anexamos aos registros” (ibidem, p.662).

Questões éticas relacionadas à mudança de objetivos fazem interseção com questões de validade. Alguns pesquisadores tentam fornecer aos leitores de seus relatórios acessos aos dados sobre os quais tais relatórios se baseiam. Especificamente, dentro de muitas tradições de pesquisa, os investigadores estão preocupados em descrever adequadamente os comportamentos e seus contextos de forma que os leitores possam fazer seus próprios julgamentos no que diz respeito à análise do pesquisador sobre o que os participantes estão fazendo (MCDERMOTT; GOSPODINOFF; ARON, 1978). Para lidar com essa preocupação, os pesquisadores usualmente fornecem aos leitores uma versão completa da transcrição sobre a qual a análise é baseada. Além disso, desde o advento dos vídeos digitalizados e dos protocolos de transferência de vídeo na WEB, os leitores podem obter, também, segmentos de vídeo digitalizados correspondentes à transcrição (veja, por exemplo, KOSCHMANN; GLENN; CONLEE, 2000, p.57, nota-de-rodapé 5.) Nesta situação, mesmo quando os participantes da gravação consentem em permitir acesso público a suas vozes e imagens gravadas, é comum que não possam estar completamente cientes – e, portanto, não possam consentir de forma pactuada – das maneiras como os espectadores redirecionam um segmento de vídeo que contenham suas imagens. Em geral, este redirecionamento

levanta sérias questões sobre até que ponto os anuentes pactuados podem ser completamente informados antes de darem seus consentimentos, especialmente devido ao acesso global ao vídeo no formato *stream* estar disponibilizado na WEB.

Quem terá acesso à informação capturada em vídeo assim como às transcrições é uma questão de confidencialidade. Para Bottorff (1994), confidencialidade e estratégias para preservá-la são tão importantes quanto a preocupação usual do consentimento pactuado. Além disso, ela insiste que os pesquisadores devem informar aos participantes quando as gravações estão ocorrendo e devem dar a eles a opção de interromper ou descontinuar a sessão de gravação (ibidem, p.252). Ela mesma sugere que os pesquisadores deveriam considerar a alteração das características que possibilitariam a identificação para proteger a identidade dos participantes se, de outra forma, a pesquisa não pudesse ocorrer (ibidem p.253).

Análise dos Dados

As gravações de vídeo oferecem muitas vantagens à análise de dados. Como mencionamos anteriormente, Bottorff (1994) argumenta que um potencial essencial dos dados de vídeo é a sua permanência. Stigler et al. (1999, p.3) notam que observações ao vivo trazem consigo problemas significativos no que tange a assegurar que observadores diferentes registrem comportamentos em formas comparáveis. Ao contrário da natureza efêmera das observações ao vivo, com videoteipes os pesquisadores podem visualizar eventos gravados com a freqüência que for necessária e em formas flexíveis, tais como “tempo real, câmera lenta, quadro a quadro, para adiante, para trás”, e podem se ocupar com suas diferentes características (BOTTORFF, 1994, p.246). De forma similar, Roschelle (2000, p.727) observa que o vídeo auxilia as interpretações sob múltiplas perspectivas e oferece a possibilidade para os participantes de assistirem e proverem interpretações. Quando pesquisa o uso do vídeo para o estudo do desenvolvimento da compreensão matemática, Martin (1999, p.79) observa que as gravações fornecem aos pesquisadores a possibilidade de fazer julgamentos cuidadosos, de revisitarem o cenário de aprendizagem, e, tomando emprestado de Erickson (1992, p.80), de “reduzir a dependência do observador de interpretações prematuras”. Roschelle (2000, p.727) indica outros potenciais para a análise dos dados de vídeo, tais

como possibilitarem interpretações sob quadros analíticos diferentes e multidisciplinares, e oportunidades para os participantes de compartilhar seus pontos de vista no que concerne a seus comportamentos. Sobre este último ponto, observando o outro lado da moeda, Martin (1999, p.85-86) nota que gravações de vídeo habilitam o pesquisador a interagir com os aprendizes enquanto estes trabalham e, conseqüentemente, a testar teorias nascentes. Roschelle (2000) refere-se à redução de dados e à amostragem como desafios aos dados de vídeo e menciona que os *softwares* podem ser úteis para lidar com esses desafios. De maneira significativa, as gravações de vídeo permitem, por exemplo, um exame em profundidade do desenvolvimento do trabalho matemático e do pensamento matemático dos mesmos estudantes depois de vários anos, assim como o estudo e análise do crescimento cognitivo de estudantes individuais no cenário de um grupo social (DAVIS et al., 1992; MAHER; ALSTON, 1991).

Análises detalhadas de vídeos de dados longitudinais, assim como os de curto prazo, tornam-se mais eficazes a partir de múltiplas sessões de visualização. O vídeo não apenas permite múltiplas visões, mas também possibilita visões sob múltiplos pontos de vista. De acordo com Lesh e Leher (2000), uma análise produtiva de videoteipes envolve a visualização por meio de múltiplas janelas ou aspectos, incluindo-se aspectos teóricos como o matemático, o psicológico e o de ensino; aspectos físicos como notas do observador, transcrições e fitas de câmeras diferentes; aspectos temporais que incluem análises de sessões isoladas, análises de sessões em grupo e análises de sessões similares por vários grupos (ibidem, p.677). Além disso, eles sugerem que se prossiga através de “uma série de triangulações e de ciclos construídos por consenso”, para testar e refinar as interpretações (ibidem, pp.677-678).

Assistir repetidamente aos vídeos potencializa o melhoramento da triangulação na análise dos dados. Apesar desta capacidade, Alston e Maher (1990) notam uma limitação dos dados obtidos a partir de episódios nos quais algumas crianças podem ser mais verbais que outras. Os mesmos autores afirmam que “entrevistas de *follow-up* poderiam favorecer percepções acerca da natureza da categoria *incerteza*, assim como prover oportunidades para sondar significados que são vagos ou inconsistentes em proposições escritas” (ibidem, p.9). Outros pesquisadores têm construído procedimentos metodológicos para estimular a triangulação na análise de dados. A esse respeito, Maher

e Martino (1996a) adiantam a noção de “portfólio de vídeo” como uma coleção de diferentes tipos de dados centrados em um episódio ou em uma série de episódios de interesse. Para eles, um portfólio de vídeo contém (a) “cortes” no videoteipe dos episódios; (b) episódios documentados que emergiram da análise; (c) trabalho escrito associado dos estudantes e; (d) notas do investigador documentando atividades matemáticas que pesquisadores avaliam como sinais do desenvolvimento de idéias matemáticas (MAHER; MARTINO, 1996a, p.202). De maneira importante, um portfólio de vídeo pode fornecer uma explicação escrita, visual e aural do pensamento dos aprendizes sobre situações matemáticas e o desenvolvimento de suas idéias ao longo do tempo. Um exemplo de documentário do uso de dados longitudinais de videoteipe para delinear a evolução cognitiva do estudante, a partir de padrões reconhecidos pela teoria em pauta, está contida em Maher e Martino (2000).

Alguns pesquisadores transcrevem os dados de vídeo, e essas transcrições constituem seu meio analítico. Este movimento dos dados do vídeo para a transcrição não ocorre sem dificuldades associadas. Transcrever dados de vídeo envolve a representação de interações. Pesquisadores tentam produzir como verídica uma representação de interações pela inclusão de representações, não apenas de interações verbais como também das gestuais. Entretanto, uma transcrição não é uma categoria simples e universal. Mesmo embora seja impossível desenhar uma transcrição genuína, exata, de interações gestuais e verbais capturadas no videoteipe, é possível produzir transcrições que, por um lado, são “necessariamente seletivas” (ATKINSON; HERITAGE, 1984, p.12) e “teoricamente guiadas” (ERICKSON, 1992, p.219) e, por outro, são, apesar de tudo, aproximações acuradas para serem suficientemente exatas e genuínas para os propósitos da pesquisa. Ou seja, transcrições podem ser, mais ou menos, representações válidas de interações, e suas convenções dependem dos propósitos analíticos dos pesquisadores (ERICKSON, 1992). Além disso, sistemas de representação para a transcrição de interações não são uniformes. Por exemplo, o sistema de transcrição desenvolvido por Jefferson (1984) tem como propósito transferir para a página o som e o posicionamento seqüencial da fala, ao passo que as convenções de transcrição usadas no Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) são desenhadas para gravar somente o discurso e não outros comportamentos que circundam este discurso (STIGLER et al., 1999, p.161).

Fitas como Dados versus Transcrições como Dados

Uma questão metodológica crítica no uso de gravações de vídeo refere-se à decisão de tomar as fitas ou suas transcrições como dados sobre os quais a análise irá se basear. Pirie (1998, p.160) descreve este ponto de maneira interessante: assim como existem aqueles para os quais “os dados são as fitas”, há os que consideram que “os dados são as transcrições”. Cada posição tem seus méritos e deméritos. As câmeras de vídeo digitais certamente são as que, atualmente, se posicionam como as melhores disponíveis para capturar e preservar o desvelar momento-a-momento de um fenômeno, revelando, como afirmam Davis et al. (1992, p.187), uma “grande complexidade dentro do que foi uma vez pensado como um mundo ‘simples’ para se ‘fazer matemática’”. Superior às notas de campo dos etnógrafos, as fitas podem tornar visíveis nuances sutis na fala assim como nos comportamentos não-verbais. Embora ambas requeiram equipamentos eletrônicos para visualizá-las, CDs ou DVDs de vídeo digitalizados são menos desajeitados que as fitas. Em contraste, as transcrições são mais portáteis que as fitas e, ao contrário de CDs e DVDs, não requerem equipamentos especiais para acessá-los. De fato, com transcrições, Maher e Alston (1991, p.71-72) avançam a idéia de que “análise cuidadosa de transcrições de vídeo de crianças fazendo matemática permite um estudo detalhado de como as crianças reais lidam com as idéias matemáticas que aparecem a partir da situação-problema”.

Todavia, muitas ocorrências são potencialmente perdidas no movimento da fita ou do CD para a transcrição. Citando Hammersley e Atkinson (1983), Martin (1999) nota que o videoteipe, ironicamente, pode produzir dados demais, e que transcrevê-los torna difícil manter contato com a perspectiva teórica de alguém enquanto se tomam as amostras. Sobre este ponto de saturação de dados, em uma discussão de metodologias de entrevistas clínicas, Clement (2000, p.572) observa que a razão da “dificuldade com uma fonte rica em dados como o videoteipe, é que existem dados demais para se analisar de forma significativa!”. Ele observa que um(a) investigador(a) deve decidir “que aspectos de um tal fluxo contínuo de comportamentos são mais relevantes para o

propósito e contexto do estudo”, e “o que é relevante dependendo do nível da pergunta de pesquisa sobre a qual ele(a) está interessado(a)” (ibidem, p.572). Para análises significativas de dados de vídeo, extensivos ou não, Martin (1999) nota que Pirie (1996) advoga que não se transcrevam as fitas e, em vez disso, que se trabalhe exclusivamente sobre elas (ibidem, p. 82), posição esta apoiada igualmente por outros pesquisadores.

Apresentação

Além de questões analíticas, ambas, fitas e transcrições, são úteis para propósitos de apresentação. A partir da posição que Pirie (1996) promove, de que as análises deveriam ser baseadas exclusivamente nas fitas, transcrições de episódios de vídeo são úteis para apresentar evidências para as interpretações. Uma limitação do formato escrito para a apresentação de análises de dados é que segmentos de vídeo normalmente não estão disponíveis para o leitor. Pesquisadores tentam tornar relevantes características do material visual por meio da transcrição e da descrição, mas, freqüentemente, estas fornecem resultados que não são completamente satisfatórios. Relatórios de pesquisa disponibilizados na WEB podem contornar esta limitação. Com os avanços nas tecnologias de *streaming* e *hypelinks* na Internet, os pesquisadores podem integrar *clips* de gravações em seus relatórios de pesquisa, e os leitores, com software residente apropriado em seus computadores, têm a possibilidade de assistir a eles.

As gravações de vídeo são atraentes e auxiliam não apenas as comunicações escritas como também as orais. Como nota Roschelle (2000, p.728), essas gravações permitem a “um pesquisador fazer conexões mais diretas entre comportamentos observáveis e interpretações”. Apesar disso, o uso de gravações de vídeo em apresentações de pesquisa pode ser problemático dada a tentação dos pesquisadores em exibirem seus “melhores casos” no lugar da “performance mais típica”. As imagens de vídeo podem ser poderosas e persuasivas. Stigler e Hibert (1999, p.22) apontam que “imagens produzidas em vídeo podem ser poderosas demais, pois podem focar a atenção sobre um exemplo que se destaca, mesmo quando o exemplo não seja típico”. Para amenizar a tendência das imagens de vídeo de falsamente retratar a tipicidade, eles combinam imagens destacáveis com dados de vídeo quantificados e codificados

(STIGLER et al., 1999). Roschelle (2000) adverte os pesquisadores contra a apresentação de *clips* de vídeo sem explicar de antemão às suas audiências as informações contextuais e os critérios utilizados na seleção desses *clips*. Sem isso, as audiências podem criar interpretações conflituosas e fora do contexto da pesquisa. Para evitar esses problemas, ele argumenta que a comunidade de pesquisa necessita “estabelecer diretrizes para a apresentação de *clips* de vídeo” (ibidem, p.728).

Um modelo analítico desenvolvido na prática: vários exemplos

Apresentamos um estudo de questões relacionadas ao uso de dados de vídeo identificadas por pesquisadores em educação, em geral, e em Educação Matemática, em particular. Em nossa revisão da literatura, a despeito do quase ubíquo uso da tecnologia de vídeo na pesquisa em Educação Matemática, temos notado lacunas importantes nas discussões metodológicas. Exceto por Erickson (1992), não encontramos nenhuma discussão dos critérios indicando situações de pesquisa para as quais a coleta de dados de vídeo seja útil. Além disso, encontramos pouca elaboração explícita de métodos analíticos para o uso de dados obtidos por meio do vídeo em estudos observacionais do desenvolvimento do pensamento matemático. Embora não trabalhando explicitamente em Educação Matemática, alguns pesquisadores têm proposto modelos para a coleta de dados audiovisuais e análise que são ligados à observação participante. (ERICKSON, 1992, e o Santa Barbara Classroom Discourse Group da University of California em Santa Barbara).

Em Educação Matemática, discussões específicas sobre métodos para analisar dados de vídeo são esparsas. Para investigar ensino e aprendizagem de Matemática e Ciências em salas de aula, Clarke e seus colaboradores (CLARKE, 2001b) têm desenvolvido uma abordagem analítica qualitativa denominada Metodologia de Descrições Complementares. Uma característica retirada desta abordagem é que um corpo comum de videoteipe e de dados de entrevistas – incluindo-se a construção retrospectiva dos eventos pelos participantes – é analisado a partir de múltiplos quadros teóricos (CLARKE, 2001a), sem qualquer abordagem metodológica comum à análise de dados de vídeo. Pirie (2001) discute como ela e seus colaboradores no “grupo-*m*”, da *University of British Columbia*, assumem um método comum para a análise de vídeos

sob múltiplas perspectivas. Em seu trabalho, elas examinam um conjunto de dados a partir de várias e diferentes perspectivas teóricas que consideram o desenvolvimento da compreensão matemática. Cobb e Whitenack (1996) apresentam seu método de quatro fases para analisar gravações de vídeos e transcrições para estudos de caso, que eles afirmam ser consistentes com o método comparativo constante que Glaser e Strauss (1967) advogam.

Em contraste com a parcimônia de modelos para a análise de dados de vídeo que visam a estudar o desenvolvimento cognitivo matemático, relatórios (artigos de periódicos, apresentações de conferências, teses de doutorado, e atividades em disciplinas) que têm emergido do *The Robert B. Davis Institute for Learning* (RBDIL) da *Rutgers University* contêm apontadores explícitos e implícitos para uma abordagem analítica geral, que pode acomodar diferentes quadros teóricos. Nossa abordagem tem se desenvolvido ao longo de aproximadamente duas décadas numa tentativa de entender o desenvolvimento das idéias matemáticas (DAVIS et al., 1992). Ela se apóia em um estudo longitudinal, atualmente em seu décimo-sexto ano, sobre o desenvolvimento de idéias matemáticas de um grupo focal de estudantes (DAVIS; MAHER, 1990, 1997; MAHER; MARTINO, 1996a; MAHER; SPEISER, 1997). Para entender como os estudantes pensam e raciocinam sobre um conjunto de idéias matemáticas, a pesquisa e a análise dos dados levam à análise de cada estudante individualmente, em contextos de entrevistas clínicas ou trabalhando em grupo construindo conhecimento matemático (DAVIS et al., 1992; MAHER; SPEISER, 1997; SPEISER; WALTER, 2000).

Através do estudo longitudinal, nosso grupo de pesquisa no RBDIL tenta entender o desenvolvimento da compreensão matemática examinando temporalmente o discurso e as anotações de estudantes à medida que eles se engajam na investigação matemática. A base teórica deste estudo vem de três fontes: pesquisa sobre o desenvolvimento de idéias matemáticas (DAVIS, 1984; DAVIS; MAHER, 1990, 1997; SPEISER; WALTER, 2000), modelos do desenvolvimento da compreensão (PIRIE, 1988; PIRIE; KIEREN, 1989, 1994) e teorias concernentes à geração de significados (DÖRFLER, 2000).

Um pré-requisito crítico para o uso do vídeo na captura de dados é ter critérios claros para empregar esta forma de coleta de dados e dispositivos analíticos. Em concordância com o critério geral de Erickson (1992, p.204-205) para investigar

recursos de tempo e energia nas análises de interação em estudos educacionais, consideramos a análise etnográfica de vídeo particularmente útil para a pesquisa em Educação Matemática:

Quando [...] os eventos são raros ou fugazes, ou quando sua forma marcante e característica se revela momento a momento, durante os quais é importante ter informação precisa sobre a fala e o comportamento não verbal de participantes específicos na cena [...] quando se deseja identificar sutis nuances de significado que ocorrem na fala e na ação não verbal – sutilezas que podem ser deslocadas no curso da atividade que ocorre.

Usar esses critérios e modos particulares de exame e análise de dados pode render *insights* a respeito dos significados implícitos e explícitos de participantes em um cenário educacional. Nosso modelo analítico para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático emprega uma seqüência de sete fases interativas e não lineares:

1. Observar atentamente aos dados do vídeo.
2. Descrever os dados do vídeo.
3. Identificar eventos críticos
4. Transcrever
5. Codificar
6. Construir o enredo
7. Compor a narrativa

Esta taxonomia de fases analíticas que propomos não pretende descrever a maneira pela qual um pesquisador poderia ou deveria proceder em relação à análise de dados de vídeo, mas, de alguma forma, pôr em movimento nossas hipóteses sobre fases apropriadas de análise.

Tentativas similares de se propor um método de pesquisa usando dados de vídeo têm tentado caracterizar o fenômeno em estudo (ERICKSON, 1992). Em nosso modelo analítico, vemos o desenvolvimento de idéias matemáticas e de raciocínio como processos complexos e não-lineares. Investigamos manifestações particulares desses processos pelos aprendizes, tais como apresentações de idéias, raciocínios em conversas, anotações e gestos. Todavia, nossa experiência nos persuade no sentido de que é, de fato, uma questão de pesquisa a determinação da natureza e dos contornos do que constituem idéias matemáticas e raciocínio. Nossa posição convida pesquisadores a

decidirem, no contexto de suas pesquisas, aspectos importantes de idéias e raciocínios a serem focados e a implementação da seqüência das fases a serem propostas.

Antes de discutirmos as fases de nosso modelo, apresentamos uma ferramenta de pesquisa para a construção geral de sentido: o memorando analítico. O uso que fazemos dessa ferramenta vai além daquele descrito por alguns analistas (CHARMAZ, 1983; MILES; HUBERMAN, 1994). Em nosso modelo, à medida que os pesquisadores observam, descrevem, codificam e, por outro lado, servem a seus dados de vídeo, eles continuamente escrevem em um notebook, em um PDA ou em um outro arquivo informatizado – chamado de notebook analítico – sobre suas idéias teóricas, analíticas e interpretativas emergentes e evolventes; sobre comentários anotados de transcrições; sobre hipóteses concernentes às idéias matemáticas e os raciocínios revelados no discurso dos participantes; sobre uso de anotações dos participantes para comunicar idéias entre si e com os outros; sobre conexões entre seus códigos; sobre temas emergentes dos códigos; sobre divisões mais amplas de categorias; sobre um fenômeno central emergente; sobre montagens das componentes da narrativa, e assim por diante. Em suma, como nota Creswell (1998, p.241), esses memorandos, a partir de hipóteses preliminares, orientam sobre categorias emergentes e conexões entre elas. Tais memorandos produzem também uma ponte intermediária entre a codificação dos dados e a construção do enredo, assim como a composição de rascunhos de um relatório narrativo. Além disso, durante a fase descritiva, os memorandos analíticos podem funcionar como um repositório de comentários interpretativos e inferenciais que algumas vezes perpassam as explicações descritivas dos dados de vídeo.

Ilustraremos cada uma de nossas fases analíticas com exemplos baseados amplamente sobre um portfólio de vídeo de nosso projeto de pesquisa longitudinal. O portfólio de vídeo, que inclui aproximadamente uma hora e meia de gravações de vídeo de quatro estudantes engajados na resolução de uma tarefa deliberadamente aberta – típica das tarefas de nosso projeto – e de dois pesquisadores os entrevistando sobre seus trabalhos em Combinatória, forma parte de uma coleção, maior e multirramificada, de tarefas matemáticas que temos desenvolvido no curso de nosso projeto de pesquisa longitudinal. A maneira como engajamos os estudantes nas tarefas reflete nossa perspectiva sobre aprendizagem e ensino. Chave para esta perspectiva é que conhecimento e competência se desenvolvem mais efetivamente em situações onde

estudantes, trabalhando juntos em problemas desafiadores, discutem várias estratégias, argumentam sobre idéias conflitantes e, regularmente, apresentam justificativas para suas soluções entre si e para toda a turma. O papel do pesquisador-professor em nossa perspectiva de pesquisa inclui selecionar e propor problemas, questionar, ouvir e facilitar o discurso, usualmente sem orientação direta sobre procedimentos (veja MAHER, 1998).

A tarefa de nosso portfólio de vídeo – O Problema do Táxi – é apresentado na Figura 1 abaixo na mesma forma pela qual foi submetido aos quatro estudantes⁶. A tarefa emprega o contexto não euclidiano da Geometria do Táxi (KRAUSE, 1986; MENGER, 1952,1979) para fornecer uma paisagem e estrutura matemática para a situação combinatória.

A uma motorista de táxi é atribuído um território de uma cidade, mostrado abaixo. Todas as suas corridas originam-se no ponto de táxi. Numa noite tranqüila, a motorista é chamada somente três vezes; ela pega os passageiros em uma das interseções indicadas no mapa. Para passar o tempo, ela pensa nas possíveis rotas que poderia ter tomado para cada ponto em que apanha os passageiros e imagina se poderia ter escolhido uma rota menor.

Qual é a menor rota a partir do ponto de táxi para cada ponto? Como você sabe que é a menor? Existe mais do que uma menor rota para cada ponto? Se não, por que não? Se sim, quantas? Justifique sua resposta.

Ponto de Táxi

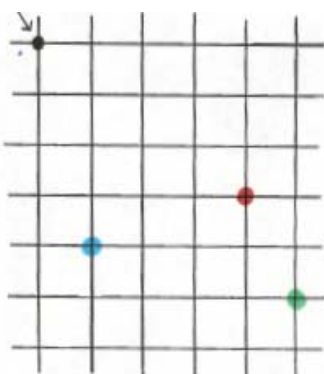


Figura 1: O problema

⁶ No contexto deste problema, para análises detalhadas das idéias matemáticas e formas de raciocínio dos estudantes através de seus discursos e anotações, veja Powell e Maher (2002; 2003) e Powell (2003).

Para trabalhar no Problema do Táxi, convidamos quatro estudantes – Brian, Jeff, Michael e Romina – do último ano do ensino médio da *David Brearley High School*, localizada na cidade operária de Kenilworth, New Jersey, EUA. Esses estudantes têm participado do estudo longitudinal desde sua concepção e, ao longo dele, têm trabalhado sobre problemas que os levam a construir idéias matemáticas que são similares à estrutura matemática subjacente do Problema do Táxi (veja, POWELL, 2003). Conseqüentemente, no contexto de nosso projeto de pesquisa, o problema foi proposto como uma tarefa com as seguintes questões diretrizes centrais de pesquisa:

1. Como os aprendizes compreendem o problema?
2. Que idéias matemáticas são geradas pelos aprendizes?
3. Como os aprendizes generalizam o problema e sua solução?
4. Como os aprendizes constroem isomorfismos entre este problema e outros sobre os quais trabalharam?

No que segue, usamos como uma espécie de lente analítica para examinar essas questões nas idéias de Dörfler (2000) concernentes a protótipos e protocolos como ferramentas para construir significados. Na subseção sobre codificação, apresentamos definições operacionais de suas três categorias de protótipos e de sua noção de protocolo.

Observando atentamente os dados de vídeo

Para se familiarizar com o conteúdo dos dados de vídeo, os pesquisadores assistem e ouvem os videoteipes várias vezes. Nesta fase, assistem e ouvem sem impor intencionalmente uma lente analítica específica sobre o que observam. Buscam, assim, acostumar-se com a sessão de pesquisa em sua totalidade. Dependendo da coleta de dados geral e do quadro teórico analítico, esta fase pode sugerir, como no caso de, digamos, *grounded theory*⁷, dados adicionais que devam ser coletados (CHARMAZ; MITCHELL, 2001; CORBIN; STRAUSS, 1990). De maneira similar, no caso de memória estimulada, episódios específicos podem ser selecionados para que os participantes observem e reflitam verbalmente (DAVIS, 1989) ou, como na

⁷ NT: Alguns autores brasileiros traduzem *Grounded Theory* como *Teoria Fundamentada*.

circunstância da entrevista clínica, projetar os dados de vídeo pode inspirar tarefas subseqüentes nas quais se engajam os participantes (GINSBURG, 1997; HAYDAR, 2002).

Descrrevendo os Dados de Vídeo

Devido à densidade da mídia, o uso de dados de vídeo resulta freqüentemente numa enorme quantidade de informação. Para propósitos analíticos, isso leva ao desafio de não apenas se familiarizar com o conteúdo dos dados do videoteipe, mas também de conhecê-lo em seus mínimos detalhes. A fase anterior é a maneira preliminar de se lidar com este desafio. Naquela, ou numa fase separada, como nosso modelo propõe, os pesquisadores anotam, no estilo etnográfico, transições particulares de situações codificadas pelo tempo, atividades ou significados. Por exemplo, com os “sinais de atividade no tempo”, de Pirie (2001, p.348), os pesquisadores escrevem breves descrições codificadas no tempo de um conteúdo de vídeo. Estas poderiam ser descrições com intervalos de dois a três, ou mesmo de cinco minutos. É importante, entretanto, que, nesta fase do trabalho, as descrições sejam de fato descritivas e não interpretativas ou inferenciais. Os pesquisadores estabelecem que ações corporais, movimentos e outros ruídos que possam ser ouvidos podem ser vistos como expressões. Pirie (2001, p.349) nota que, em vez de observações inferenciais como “Ele está tentando...” ou “Ela parece ter...”, ou mesmo “Um diagrama confuso no quadro...”, as descrições simples e factuais são melhores: “Ele escreve...”, “Ela diz...”, “O professor desenha...”. Em geral, a idéia é mapear os dados de vídeo de tal forma que alguém lendo as descrições teria uma idéia objetiva do conteúdo dos videoteipes. Essencialmente, as descrições ajudam o pesquisador a tornar-se mais familiarizado com o conjunto de dados do que se assistisse e ouvisse atentamente apenas as gravações em vídeo. As descrições codificadas no tempo permitem também ao pesquisador localizar rapidamente vinhetas e episódios. Indicar códigos de tempo com a ajuda de *timers* ou *software* é especialmente útil para a localização particular posterior de conteúdos. *Softwares* como vPrism tornam possíveis para os pesquisadores juntar eletronicamente conteúdo de vídeo, texto e código de tempo.

Na figura 2 abaixo, são descritos os primeiros 4 minutos e 44 segundos do vídeoteipe. Os três intervalos de tempo são escolhidos por serem pequenos e temáticos. Nestes intervalos, os quatro estudantes estão sentados em volta de uma mesa trapezoidal. Após o pesquisador distribuir a tarefa, os estudantes fazem perguntas sobre a tarefa, e entre eles imaginam por que todas as rotas eficientes para um ponto particular de destino possuem o mesmo comprimento.

Intervalo de Tempo	Descrição
00:00:00 - 00:02:06	A pesquisadora 1 puxa uma cadeira, senta-se entre dois estudantes no lado direito da mesa, agradece ao grupo de quatro estudantes (da esquerda para a direita: Michael, Romina, Jeff e Brian) por terem vindo, distribui o Problema do Táxi, e pede a eles para lerem e verem se o entenderam. Em seguida, a pesquisadora 1 fica de pé e, enquanto se afasta da mesa, retira a cadeira. Com a cabeça inclinada para baixo, encarando o problema, Jeff pergunta em voz alta se tem que permanecer sobre as linhas da grade e se elas representam ruas. A pesquisadora 1 responde: “ <i>Exatamente.</i> ” Romina, Brian e Jeff discutem que 5 é o número de blocos que se tem para alcançar o ponto de destino azul, e que rotas diferentes para o azul são de mesmo comprimento desde que não se prossiga além dele. Brian diz que eles deveriam provar isso.
00:02:06 - 00:02:42	A pesquisadora 1 retorna à mesa e questiona os estudantes sobre a compreensão deles em relação ao problema. Jeff diz que a tarefa é encontrar a menor rota desde que “se permaneça nas ruas”. A pesquisadora 1 complementa que é descobrir se existe mais do que um caminho mais curto. Ambos, Brian e Romina, concordam. A pesquisadora 1 prossegue dizendo que, se existir mais do que uma, eles têm que determinar quantas são. Jeff questiona a pesquisadora 1 sobre quantas rotas diferentes ela está pedindo? Ela diz que não apenas eles deverão encontrar o número de rotas menores como também terão que “convencer-nos” que eles encontraram todas elas. A pesquisadora 1, então, se afasta da mesa.
00:02:42 - 00:04:44	Jeff pede marcadores coloridos. Jeff, Romina e Brian escolhem para cada um diferentes pontos de destino. Romina diz que está a cinco quadras do ponto azul. Brian sugere contá-los para terem certeza. Michael explica que para chegar ao ponto azul deve-se ir quatro para baixo e uma à direita, já que não se pode voltar ou seguir diagonalmente. Romina pergunta como inventar uma área para isso. Jeff e Michael diz a ela que não é área, é perímetro, com cada segmento da grade

	considerado como uma unidade.
--	-------------------------------

Figura 2 – Descrição sem interpretação dos cinco primeiros minutos – aproximadamente – do conteúdo do vídeo

Identificando Eventos Críticos

Por meio da observação e da descrição dos dados do videoteipe, os pesquisadores adquirem um conhecimento profundo suficiente de seu conteúdo. Mais tarde eles prosseguirão para a próxima fase da análise dos dados, que consiste em rever cuidadosamente as fitas e identificar momentos significativos ou, como os denominamos, *eventos críticos* (MAHER, 2002; MAHER; MARTINO, 1996a, 1996b, 2000). Dentro de nosso quadro teórico para estudar a história, o desenvolvimento e o uso do pensamento dos estudantes ao longo do tempo, em concordância com Maher e Speiser (2001), identificamos *eventos* como seqüências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto de nossas – *a priori* ou *a posteriori* – questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos. Um evento é chamado *crítico* quando demonstra uma significativa ou contrastante mudança em relação a uma compreensão prévia, um salto conceitual em relação a uma concepção anterior (KICZEK, 2000; MAHER, 2002; MAHER; MARTINO, 1996a; MAHER et al., 1996; STEENCKEN, 2001), ou como Bruner (1960/1977, p.68) chama a um engano intuitivo: “um salto interessantemente errado”. Momentos contrastantes significativos podem ser eventos que confirmam ou contradizem hipóteses de pesquisa; eles podem ser instâncias de vitórias cognitivas, esquemas conflitantes ou generalizações ingênuas; eles podem ser qualquer evento que seja de alguma forma significativo para a agenda de uma pesquisa. Conectando seqüências de eventos críticos e analisando-as mais além, usando, por exemplo, comparações constantes (GLASER; STRAUSS, 1967), os pesquisadores constroem narrativas que inicialmente são amálgamas de hipóteses e interpretações e que influenciam identificações subseqüentes e análises de eventos críticos. Neste sentido, eventos críticos e narrativas co-emergem.

Eventos críticos são contextuais. Um evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa. Assim, uma instância na qual os aprendizes apresentam uma explicação matemática ou argumento, pode ser significativa para uma

questão de pesquisa preocupada com a construção de justificação matemática ou demonstração pelos estudantes e, como tal, pode ser identificada com um evento crítico. Em contraste, um pesquisador preocupado com o impacto das intervenções do professor, sobre a abstração reflexiva ou a compreensão matemática, pode considerar como críticos aqueles eventos que conectam as intervenções do professor e as articulações do pensamento do estudante a elas associadas. Entretanto, a relação entre eventos críticos e questões de pesquisa consideradas implica também que os pesquisadores podem identificar como sendo eventos críticos aqueles que incluem instâncias negativas de uma hipótese, instâncias de saltos equivocados e, de alguma forma, significativos para a questão de pesquisa do estudo. É interessante, também, notar que eventos críticos são similares ao que Gattegno (1970, 1974, 1987, 1988), observando aprendizes fazendo matemática, chama de momentos de consciência, e esses eventos ou momentos, freqüentemente, compelem pesquisadores a refletir sobre os que os antecederam e os que os sucederam.

Eventos críticos não são apenas identificados nas gravações de vídeo. Os pesquisadores podem encontrar eventos críticos fora do vídeo, em materiais como as anotações dos estudantes ou nas proposições escritas em um diário do estudante. Mais tarde, os pesquisadores podem revisar as gravações de vídeo para localizar eventos anteriores que explicam o evento crítico identificado (para exemplos deste ponto, veja POWELL, 2003; SPEISER; WALTER, 2003).

As gravações de vídeo aprimoram extremamente a busca e a identificação de eventos críticos. As observações repetidas, por exemplo, permitem aos pesquisadores visualizar os dados tantas vezes quanto necessárias antes de decidir a sinalizar um episódio particular do vídeo como um evento crítico ou descartar outro previamente escolhido. Compartilhar a visualização e a colaboração com outros pesquisadores melhora sensivelmente a qualidade e a validade dos eventos críticos identificados. A densidade do vídeo pode fornecer aos pesquisadores uma extensa quantidade de dados para selecionar eventos críticos. Quando ao estudar, por exemplo, o desenvolvimento de idéias matemáticas ou a evolução da compreensão matemática, um evento crítico é associado a uma linha do tempo, e os pesquisadores podem, então, buscar por eventos relacionados a ele no passado e no futuro. Se os eventos relacionados forem críticos e levarem ao desenvolvimento da compreensão, então o conjunto de eventos críticos

forma o que Kiczek (2000) define como um *ramo pivotal* ou um *ramo matemático pivotal* (STEENCKEN, 2001). Dentro de uma narrativa, tais ramos podem emergir e apontar para, por exemplo, as idéias matemáticas e formas de raciocínio que os aprendizes desenvolvem e que são chaves na construção de sua compreensão matemática. Analiticamente, é importante nomear o evento pivotal, indicando, por meio dele, o tema da narrativa ao qual pertence (POWELL, 2003). Além disso, quando analisamos a interação discursiva de aprendizes, um evento crítico que qualitativamente muda a trajetória da investigação é chamado por nós de *evento crítico divisor de águas* (POWELL, 2003). Um tal evento é frequentemente precedido por uma série de eventos críticos relacionados que podem ser coletados juntos, como um ramo pivotal, para indicar uma linha discursiva que provoca o evento crítico divisor de águas. Por sua vez, o evento divisor de águas inicia uma cascata de eventos, alguns dos quais podendo ser críticos. Os dados anteriores e posteriores podem já existir, e dados adicionais podem necessitar ser coletados por meio de investigações subseqüentes, tais como entrevistas clínicas ou de memória estimulada. Vídeo digitalizado em CDs e DVDs visualizados com *software* apropriado, como o vPrism, ajudam os pesquisadores a navegar através dos dados enquanto olham e apontam para eventos críticos vinculados. Alguns *softwares* permitem aos pesquisadores justapor eventos críticos relacionados de maneira a destacar seus relacionamentos. Além disso, eventos críticos são indispensáveis para uma narrativa de pesquisa que discute questões particulares de pesquisa à luz dos dados. Eventos críticos identificados nesta fase podem fornecer evidências para descobertas na própria narrativa.

A figura 3 abaixo contém comentários sobre a transcrição de um evento crítico identificado, que é relacionado à segunda questão-diretriz de pesquisa (Que idéias matemáticas os aprendizes geram?) e à quarta questão (Como os aprendizes constroem isomorfismos entre este problema e outros sobre os quais eles têm trabalhado?);

Tempo	Comentário e Transcrição de um Evento Crítico
	Antes deste episódio, Jeff tinha sugerido a Romina que eles contassem o número de rotas mais curtas, começando com aquelas mais fáceis e, então, com os pontos de destino vermelho e verde. Entre eles, gastaram um tempo estabelecendo um método para a contagem. Começando com um ponto, que está duas quadras a leste e duas quadras ao sul do ponto de táxi (formando uma sub-grade 2 por 2), eles contam o número de menores rotas de vários pontos próximos e anotam seus resultados na

00:55:31	<p>grade. Depois de trabalhar com suas subgrades 2 por 2, para as quais eles encontram 6 rotas menores, eles trabalham em uma 3 por 3, encontrando 15 menores rotas. Eles também trabalham sobre 2 por 4, 2 por 3 e 4 por 3 subgrades. Dessa forma, eles estavam controlando quatro variáveis, uma heurística, que eles desenvolveram e empregaram em várias outras tarefas em nosso estudo longitudinal. No começo deste episódio, Michael está verificando duplamente que o número de rotas menores para as subgrades 3 por 3 é 20. Enquanto isso, Brian anuncia para Romina que ele e Jeff verificaram que 15 e não 12 é o número de rotas para uma subgrade 4 por 2. Quando Romina nota que 15 deve ser também o número de menores rotas para uma subgrade 2 por 4, ela proclama sua ciência implícita de uma propriedade simétrica do padrão numérico de menores rotas, que ela e Jeff tinham desenvolvido. Além disso, ela observa que o padrão corresponde ao Triângulo de Pascal. Todavia, Romina está preocupada com seus dados para a subgrade 3 por 3. Brian se oferece para recontar as rotas para esta usando seu métodos de “pra baixo e sobre”. Entretanto, Michael tinha estado contando as menores rotas para a subgrade 3 por 3 e agora diz que encontrou 20. Suspeitando que isso confirma que eles têm o triângulo de Pascal, Jeff declara: “porque o triângulo de Pascal funciona para isso é a questão”. Este evento é crítico uma vez que aponta idéias-chave matemáticas que os estudantes geram assim como a heurística e as conexões de conteúdo que fazem em outros problemas. Este evento ilustra que os estudantes procuram entender e explicar as razões pelas quais o triângulo de Pascal subjaz a estrutura matemática do Problema do Táxi. Além disso, ao fim do episódio, Romina sugere que relacionem (encontre um isomorfismo entre) este problema e o Problema das Torres, um problema que eles já tinham encontrado e resolvido.</p>
00:56:56	<p>BRIAN: Você resolveu o cinco por cinco?</p> <p>MICHAEL: Cinco por cinco? Eu estou fazendo o três por três bem agora.</p> <p>BRIAN: Vamos ver se concordamos. Se já sabemos o que é, então temos que resolver.</p> <p>MICHAEL: Eu quero apenas ter certeza que é 20. Assim – [Michael conta as rotas com sua caneta na grade]</p> <p>MICHAEL: Estão faltando duas. Provavelmente está certo, apesar de tudo.</p> <p>BRIAN: Você conseguiu , ah, a escadaria um?</p> <p>MICHAEL: Qual? Para a três por três?</p>

01:00:16	BRIAN: Sim. [inaudível]. [Romina retorna.]
	ROMINA: Oh, vocês rapazes foram e esqueceram sobre isso, não foi?
	MICHAEL: Eu não fiz isso.
	BRIAN: O Jeff lhe disse?
	ROMINA: O quê?
	BRIAN: Que este?
	ROMINA: Para qual?
	MICHAEL: //Para -
	BRIAN: //Quatro por dois.
	ROMINA: Então você obteve quinze? Então, agora está funcionando? [Significando que o padrão de menores rotas corresponde ao triângulo de Pascal] E, então, o 2 por quatro tem que ser quinze também. Agora, se fizermos três por três, e der vinte, nós terminamos.
	BRIAN: Qual você está fazendo?
	ROMINA: O quê?
	BRIAN: Ele disse que dois saíram fora do previsto. [inaudível] [Romina começa a apagar os números na transparência e pega uma nova com a grade]
	ROMINA: Eu vou virar isso.
	BRIAN: É somente um par de números. [Romina está escrevendo números na grade; a primeira fila é 2 3 4 5; a segunda é 3 9; a terceira é 4; e a quarta tem um 5]
	ROMINA: Fiz novamente. Você obteve doze para este? Quinze, quero dizer. [Romina muda o 9 na segunda fila para um 6.]. Você obteve doze para este? Quinze, quero dizer. [Ela reescreve os números na grade e adiciona um 15 à direita do 10 e sob o 10.]
BRIAN: Qual você espera ser 20? Três por três? [Romina concorda, sim]	
MICHAEL: O que vocês estão fazendo?	
BRIAN: Verificando.	
ROMINA: Eu não acho, - aqui – que ele tem – Ele estava só fazendo três por três, não estava? [Romina olha para seus papéis]	
BRIAN: Sim, não é nada demais.	
ROMINA: Eu já encalhei. [Brian desenha um retângulo 3 por 3 em seu papel. Romina desenha em rotas menores para o três por três “imaginário”]	

	em sua grade. A caneta de Romina pára quando desenha uma rota]
JEFF:	Você não deveria estar. Onde você está indo?
ROMINA:	Três por três [Ela mostra o papel dela ao Jeff.]
JEFF:	Você disse F fazendo o - o [inaudível].
MICHAEL:	Sim, eu obtive vinte para este.
JEFF:	Para o três por três?
MICHAEL:	Sim.
JEFF:	Tudo bem então – Quero dizer, não posso explicar por que pensamos – bem – corretamente. [Jeff acena sua mão.]
MICHAEL:	//Eles vão nos perguntar-
JEFF:	//Tudo bem, então a próxima questão é por que -// por que-
ROMINA:	//Agora -
MICHAEL:	//Como você sabe -
ROMINA:	//Simplesmente relacione esta com os //blocos. [Jeff aponta na grade com sua caneta.]
JEFF:	//Espere - Por que é isto – porque o triângulo de Pascal funciona para isso é a questão.
ROMINA:	//Exatamente; relacione isso com os blocos. [A palavra “blocos” aqui se refere ao Problema da Torre.]

Figura 3: Este episódio é identificado como um evento crítico em relação a várias questões diretrizes de pesquisa.

Transcrevendo

Uma das decisões que os pesquisadores têm que tomar quando analisam dados de pesquisa que incluem gravações de expressões dos participantes é transcrever ou não. As razões para a transcrição variam. Alguns pesquisadores transcrevem para fornecer evidência de asserções dos estudantes no relatório de pesquisa. Outros transcrevem de maneira a utilizar uma abordagem analítica particular que depende substancialmente dos dados transcritos. Existem, também, pesquisadores que sustentam que as transcrições revelam coisas importantes nem sempre visíveis de outra forma. Como Atkinson e Heritage (1984, p 12) notam, transcrições são “necessariamente seletivas” e, de acordo com Erickson (1992, p.219), são “guiadas teoricamente”. É importante notar que é, portanto, impossível representar uma transcrição exata, genuína, para propósitos de pesquisa particulares. Transcrições podem ser mais ou menos representações válidas de

interações, e suas convenções dependem dos propósitos analíticos dos pesquisadores (ERICKSON, 1992, p.219). Um sistema de transcrição útil é o baseado naquele desenvolvido por Jefferson (1984), que tem como propósito transferir para o papel o som e o posicionamento seqüencial da conversa. Uma tal transcrição de discurso é feita sob a perspectiva do ouvinte e apresenta seqüências ligadas de expressões que constituem os momentos dos interlocutores na fala e no pedido da palavra.

Existem razões importantes para se transcrever os registros de vídeos. Primeiramente, seguindo procedimentos da coleta de dados e das tradições analíticas, os pesquisadores podem implementar um processo de codificação aberta sobre os dados para descobrir temas que estão acima, além e em adição àqueles sugeridos pelas, *a priori*, questões específicas, diretrizes da pesquisa e códigos dedutivos. A produção da transcrição e a tradução estática, física, de uma sessão de pesquisa dão oportunidades aos pesquisadores para extensas e consideráveis deliberações sobre falas e gestos conhecidos. Em segundo lugar, os pesquisadores, analisando as práticas discursivas dos participantes, em especial seus diálogos, acham útil visualizar a reconstituição seqüencial impressa da fala para ver o que ela revela sobre os significados matemáticos e compreensões que os participantes constroem. Uma vez que as práticas discursivas incluem ações que não são somente expressões, os pesquisadores indicam, em suas transcrições, movimentos de corpo relevantes, assim como anotações (escritos, desenhos, esboços, e assim por diante) que os participantes criam. Em terceiro, transcrições são, para propósitos práticos, um registro permanente e podem revelar categorias importantes que não são sempre passíveis de serem discernidas por meio da visualização das imagens, uma vez que, não obstante a tecnologia do *replay*, as imagens aurais e visuais do vídeo que os “olhos e ouvidos da mente” do observador capturam são essencialmente efêmeras. Em vez disso, com a transcrição de dados, pode-se considerar mais que momentaneamente o significado de expressões específicas. Em quarto lugar, os pesquisadores transcrevem de forma tal que, mais tarde, se e onde for apropriado no relatório da narrativa, eles podem fornecer evidências de descobertas nas palavras dos próprios participantes.

As transcrições permitem aos pesquisadores executar codificação síncrona com videoteipes e outros artefatos. À medida que os pesquisadores transcrevem códigos, eles continuamente revisam episódios correspondentes no registro de vídeo para perceber

nuances sutis no discurso e nos comportamentos não-verbais, assim como nas influências visíveis sobre padrões de comportamento. A importância das transcrições, não obstante o exame do registro de vídeo, é clara na análise de artefatos como anotações, uma vez que estas são construídas como se fossem camadas, ao longo do tempo.

Em nosso modelo analítico, os pesquisadores transcrevem eventos críticos para analisar com atenção elementos como linguagem e fluxo de idéias, assim como para propósitos de apresentação (veja figura 3). Nós também transcrevemos porções dos dados de vídeo, vinhetas ou episódios, que fornecem evidência para assuntos analíticos ou teóricos relativos às nossas questões-diretrizes de pesquisa (veja Figura 4). Para qualquer que seja o propósito que uma transcrição tenha sido produzida, vários observadores verificam sua precisão. Entretanto, nossas análises não são baseadas somente na inspeção de transcrições, independentes de referência direta aos registros originais de vídeo. Alguns pesquisadores consideram úteis os equipamentos de reconhecimento de voz e softwares como o vPrism, que permitem aos pesquisadores ocuparem-se, simultaneamente ao conteúdo do discurso, aos gestos dos locutores e ao tempo dos episódios.

Codificação

Com ou sem transcrições, a codificação é crucial para a análise de dados de vídeo. Esta atividade visa identificar temas que ajudam um pesquisador a interpretar seus dados. Em nosso modelo, esta atividade é similar à identificação de eventos críticos, pois ambas requerem a visualização intensiva e cuidadosa dos vídeos por longos períodos de tempo. Nesta fase da análise, a diferença é que os pesquisadores focam sua atenção no conteúdo dos eventos críticos. Assim, as gravações de vídeo são proveitosas nesta atividade da mesma forma que o são no aprimoramento da identificação de eventos críticos. De maneira expressiva, empregar esquemas de códigos de observação, decididos anteriormente às observações ou visualizações da videotape, pode “cegar” os pesquisadores e tornar difícil perceber comportamentos imprevistos. Todavia, como Alasuutari (1996, p.373) argumenta, a codificação não é teoricamente “inocente”. Da mesma forma que a identificação de eventos críticos, a codificação é

dirigida pela perspectiva teórica dos pesquisadores e pelas questões de pesquisa. Visualizações repetidas e compartilhadas, tornadas possíveis pela tecnologia de vídeo, e a densidade de dados do vídeo aprimoram a habilidade dos pesquisadores para buscar e identificar códigos, quando estes são predeterminados ou emergentes.

Da mesma forma que os eventos críticos, os códigos são definidos em relação à questão de pesquisa perseguida ou aos temas emergentes. Ao longo dos anos de nossa investigação sobre o desenvolvimento de idéias matemáticas, temos desenvolvido esquemas de códigos informados por nossas suposições sobre o pensamento matemático e práticas de pesquisa sobre o desenvolvimento de idéias matemáticas e formas de raciocínio. Consideramos que são particularmente úteis e importantes para codificar idéias matemáticas de aprendizes, explicações matemáticas ou argumentos, apresentações matemáticas (simbólica, pictórica e gestual) e características e funções de discurso. Temos também refinado códigos relacionados a vários construtos, tais como eventos críticos, sinais, e o fluxo de idéias entre aprendizes em um grupo.

Investigando o desenvolvimento do pensamento probabilístico, através da codificação de conjuntos de dados para eventos críticos, Kiczek (2000) nota como esses eventos estão conectados. Um após o outro, ela sinaliza como idéias particulares de probabilidade são construídas entre os participantes de sua pesquisa. A seqüência conectada de eventos críticos leva ao crescimento da compreensão de idéias particulares de probabilidade, e Kiczek (2000) desenvolve o construto de ramo pivotal para descrever este fenômeno. Ao sinalizar o crescimento da compreensão sobre frações entre alunos de 4ª série, Steencken (2001) codifica as representações dos aprendizes de frações com barras de Cuisenaire. Quando, na comparação de frações, Meredith constrói dois modelos diferentes para apoiar seu raciocínio, Steencken documenta a emergência da idéia de frações equivalentes, sinaliza retrospectivamente as origens das idéias de Meredith e, então, segue o fluxo das idéias de Meredith entre os pares dela (STEENCKEN, 2001; STEENCKEN; MAHER, in press). Analisando a contribuição da prática discursiva dos participantes sobre idéias matemáticas construídas, enquanto resolviam o Problema do Táxi, Powell (2003) distingue seqüências conectadas de eventos críticos, nos quais os participantes, cujas ações formam um ramo pivotal, implementam uma nova agenda para a ação que muda qualitativamente a atividade de resolução de problemas e desenvolvem o construto de um evento crítico divisor de

águas. Dispositivos de *hardware* e *software* podem tornar a sinalização para os códigos mais fácil e, também, ajudar na documentação, armazenamento e gerenciamento de códigos e seus conteúdos.

Temos ressaltado que os pesquisadores são guiados nos códigos que desenvolvem por meio de seus quadros teóricos, suas questões de pesquisa e pelo nexos do que observam. Abaixo segue um exemplo de códigos específicos, desenvolvidos por Walter e Maher (2001, 2002). Esses códigos indutivos e emergentes focam a identificação de temas e padrões nas interações discursivas estudante-a-estudante.

(QA) Questão que verifica a “afinação” entre as compreensões dos participantes e busca concordância mútua explicitada;

(QI) Questão interrogativa para informação que não seja procedural;

(QP) Questão procedural;

(QC) Requisição de confirmação pelo participante relacionada à compreensão conceitual do próprio participante; difere da “afinação” por não demonstrar preocupação pela compreensão “dos outros”;

(QS) Questão especulativa que postula potencial; e

(QR) Questão retórica.

Em particular, esses códigos focam a natureza das perguntas estudante-a-estudante.

Nosso modelo analítico também é compatível com a implementação de códigos dedutivos ou *a priori*. A perspectiva teórica de Dörfler (2000) para compreender a construção de significados matemáticos oferece uma lente analítica para examinar nossos dados de vídeo. Ilustramos isso com os trabalhos de quatro participantes no Problema do Táxi (veja Figura 1). O uso dos construtos de Dörfler – protótipos e protocolos – fornece uma ferramenta útil para investigar nossa questão central de pesquisa (Que idéias matemáticas os aprendizes geram?) Como ilustração, apresentamos abaixo definições operacionais desses construtos para nossa codificação e propósitos analíticos.

1. Protótipos:

- a) Protótipo Figurativo (FP): Os aprendizes estão engajados num protótipo figurativo quando focam suas atenções e exibem interesse exclusivamente nos

aspectos físicos e geométricos de um objeto como uma instância de uma idéia particular. O objeto é o portador de um protótipo figurativo para a idéia particular.

- b) Protótipo Relacional (RP): Os aprendizes são engajados num protótipo relacional, quando focam atenção, exibem interesse, ou constituem (concebem) relacionamentos entre elementos de um objeto como instâncias de relações matemáticas particulares. Relações são lidas *dentro* dos elementos de um objeto. O objeto é o portador de um protótipo relacional para a idéia particular.
- c) Protótipo Operativo (OP): Os aprendizes estão engajados em protótipo operativo quando focam atenção, exibem interesse, ou executam ações que usam, transformam, ou produzem um objeto. O objeto é o portador de um protótipo operativo para a idéia particular. As ações são conectadas aos protótipos relacionais.

2. Protocolo (P): Os aprendizes constroem um protocolo quando observam, refletem, ou descrevem os estágios essenciais, fases, resultados e produtos de atividades, construções, ações ou fluxo de ações, incluindo-se os atos de fala. Aprendizes engajados em um protocolo criam anotações quando descrevem suas ações verbalmente ou na escrita (símbolos, sistemas de símbolos, incluindo-se diagramas). A simbolização, ou portadora de um protocolo, torna visíveis aspectos dos resultados dos processos cognitivos dos aprendizes que podem, de outro modo, não se tornar perceptíveis. Os pesquisadores possuem evidência de protocolos nas portadoras que os aprendizes produzem. Um protocolo particular aparece de uma situação específica, mas pode ser utilizado para descrever outras situações mais gerais.

Os aprendizes podem estabelecer protocolos pela observação de outros realizando ações e, de acordo com a interpretação deles, percebendo essas ações. O

protocolo resultante evidenciado por seu portador expressa seus focos de interesses e atenção.⁸

Na figura 4, apresentamos análises de um episódio a partir dos dados de vídeo de uma sessão de pesquisa com participantes trabalhando sobre o Problema do Táxi. Após os excertos da transcrição, os pesquisadores codificam para as instâncias dos participantes engajados com protótipos e protocolos. Acima dos excertos, os pesquisadores escrevem comentários que discutem e justificam o material identificado. Nesta fase, tal comentário freqüentemente manifesta linhas analíticas de uma narrativa ou um enredo.

Construindo o Enredo

Uma fase que freqüentemente segue a codificação em nossa análise de dados é a que identifica ou constrói um enredo. O enredo é o resultado da lógica dos dados, com atenção particular para os códigos identificados (veja Figura 4). Em nosso modelo, os pesquisadores examinam com atenção e intensivamente códigos identificados e seus respectivos eventos críticos, tentando discernir uma narrativa emergente e evolvente sobre os dados. Nesta fase analítica, a interpretação dos dados e as inferências assumem papéis importantes. Construir um enredo requer que o pesquisador proponha organizações criteriosas e coerentes dos eventos críticos, freqüentemente envolvendo fluxogramas complexos. Este processo freqüentemente envolve discernir *sinais*, que são uma coleção de eventos, primeiramente codificados e então interpretados para fornecer insights sobre o desenvolvimento cognitivo do estudante (MAHER, 1996, 1997). O sinal contribui para a narrativa de uma história intelectual pessoal do estudante assim como para a história coletiva de um grupo de estudantes que colaboram.

O processo de racionalizar os eventos críticos e códigos é complexo e, mais freqüentemente que o contrário, não-linear. Pesquisadores podem ter que ir e voltar examinando eventos críticos, códigos e outros dados fora do vídeo, tais como as anotações dos participantes e as notas de campo dos pesquisadores. Alguns eventos críticos ou códigos podem ser abandonados e novos podem ser procurados à medida que

⁸ Essas categorias de codificação são baseadas no trabalho DÖRFLER, Willi. Means for meaning. In: COBB, P.; YACKEL, E.; McCLAIN, K. (Ed.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p.99-131. e em contatos pessoais com Willi Dörfler.

maiores evidências podem ser necessárias. Alguns pesquisadores podem desejar incluir participantes ou outros pesquisadores nas interpretações dos dados. Uma vez mais, aplica-se aqui a forma pela qual os registros de vídeo aprimoram a identificação de eventos críticos e a codificação dos dados. Visualizações repetidas permitem aos pesquisadores refinar continuamente suas interpretações de episódios particulares de dados de vídeo. Visualizações compartilhadas, envolvendo participantes ou outros pesquisadores, assim como importantes detalhes que freqüentemente acompanham os dados de vídeo, podem melhorar a qualidade das interpretações. Ferramentas de navegação da tecnologia de vídeo permitem aos pesquisadores procurar e justapor eventos críticos em formas que destacam *insights* importantes do pensamento matemático e da compreensão dos estudantes. Isso é particularmente útil para estudos longitudinais, onde evidências importantes podem se perder ao longo do tempo.

Tempo	Código	Comentário e Excerto da Transcrição
		<p>Durante os primeiros minutos, os estudantes estão focalizando as características geométricas das linhas da grade do táxi que eles consideram relevantes. As linhas da grade representam um sistema idealizado de ruas perpendiculares de duas mãos. Jeff nota que se tem que permanecer sobre as linhas e que elas representam ruas. Brian reconhece que para se alcançar o ponto de destino, deve-se ir para o sul ou para leste e traça diferentes caminhos para um ponto de destino particular. Aqui os estudantes predominantemente trabalham como protótipos figurativos.</p> <p>Romina observa que para determinar a menor rota para o destino vermelho, não se deve ir além das projeções vertical e horizontal do ponto em questão, de forma a atingir o que podemos chamar de rota eficiente. Ela também percebe um relacionamento entre rotas eficientes para o ponto de destino vermelho: todas as cinco rotas têm comprimento cinco. Neste ponto, ela está engajando-se em um protótipo relacional.</p> <p>Interessantemente, Brian toma a observação de Romina como uma conjectura e sugere que a justifiquem. Neste momento, eles brevemente se engajam numa idéia que é potencialmente um protótipo operativo. Parece que justificação é um hábito mental que é parte da cultura matemática desses estudantes. Este engajamento é interrompido pela indagação da pesquisadora 1, que não é parte deste excerto, sobre o que</p>

00:01:30	FR	eles entenderam do problema proposto. Contudo, após responderem à pesquisadora 1 na forma de uma pergunta, Jeff reintroduz a sugestão de Brian.
	RP	<p>JEFF: Você tem que se manter sobre as linhas, certo? Essas seriam as ruas? [Jeff acena sua mão.]</p> <p>PESQUISADORA 1: Exatamente.</p> <p>JEFF: Tudo bem.</p> <p>ROMINA: De qualquer forma você vai-</p> <p>BRIAN: Quase, porque, olhe-</p> <p>ROMINA: Enquanto você não passar isto [eles estão ticando com suas canetas e traçando rotas]</p> <p>BRIAN: O primeiro, não.</p> <p>MICHAEL: Bem, o que acontece se você vai para o ultimo?-</p> <p>BRIAN: Você pode ir até em baixo, subir, descer três e subir dois</p> <p>ROMINA: Não é isso - Todas elas não resultam no mesmo número de blocos? [Jeff começa a desenhar.]</p> <p>BRIAN: Cinco.</p> <p>JEFF: Cinco?</p> <p>ROMINA: Cinco? Eu obtive sete.</p> <p>JEFF: Hã, qual – sim, estamos ambos olhando para a vermelha.</p> <p>BRIAN: Eu estou olhando para a zul. [Michael conta ticando com a caneta na linhas da grade]</p> <p>JEFF: Sim. [Romina e Brian contam ticando enquanto conversam sobre o problema]</p> <p>ROMINA: Oh, OK.</p> <p>JEFF: Certo. Quero dizer, quase.</p> <p>ROMINA: Contanto que você não passe este, tudo bem. Então é a mesma coisa.</p> <p>BRIAN: Então vamos provar isto.</p>

Tempo	Código	Comentário e Excerto da Transcrição
		Ligados à observação anterior de Romina (veja o exemplo 1), os estudantes notam também que as menores rotas do ponto de táxi para o ponto de destino não envolvem movimentos para cima (indo para o norte)

00:03:44		<p>ou para a esquerda (indo para o leste) e são de mesmo comprimento. Tomando a sugestão de Brian (veja o final do Exemplo 1), Jeff pede para alguém explicar porque as rotas que eles acreditavam serem menores tinham o mesmo comprimento. Michael responde e explica que para alcançar qualquer ponto de destino específico, as menores distâncias exigirão sempre que se mova por um número fixo de unidades para baixo (sul) e um número fixo na horizontal (leste). Ele observa que não se pode ir diagonalmente. Ele generaliza esta constatação para todos os caminhos, e Jeff fica convencido. Na conversa, Michael emprega um protótipo operacional. O número de unidades para baixo e o número de unidades na horizontal são objetos relacionados pela adição para produzir o comprimento do menor caminho.</p> <p>Interessantemente, quando Michael observa que no contexto desse problema, não se pode ir diagonalmente, ele toca na distinção fundamental entre a métrica da Geometria Euclideana e a geometria do Táxi.</p> <p>OP RP</p> <p>JEFF: Então porque – porque é o mesmo toda vez?</p> <p>MICHAEL: Você está indo da esquerda para a direita. [Michael movimenta-se para a grade dela]</p> <p>ROMINA: Ou quatro por um, certo?</p> <p>MICHAEL: Sim, quatro por um, a menos que você vá para trás algumas vezes.</p> <p>MICHAEL: Você não pode ir na diagonal, então você tem que ir para cima e para baixo. Você não pode // Você não pode evitar de fazer isso.</p> <p>JEFF: //Você não consegue chegar - Sim.</p> <p>ROMINA: E se eu fosse para o vermelho quando eu fosse um, dois, três, quarto – [apontando para o papel]?</p> <p>MICHAEL: Mas eles não estão pedindo para // [inaudível]</p> <p>ROMINA: //Cinco, //seis, sete.</p> <p>JEFF: //Cinco, seis, sete. //É a mesma coisa.</p> <p>ROMINA: //Como //Como - como eu vou para - como //como eu iria -</p>
----------	--	---

		JEFF: //É a mesma coisa.
		MICHAEL: //É a mesma.
		ROMINA: -Invente uma área para isso? Como esta – esta área aqui? [Romina movimenta sua caneta sobre a linha da grade.]
		BRIAN: Como mais e [inaudível].
		JEFF: Bem, isso não é área.
		MICHAEL: Não é área. É // só um-
		JEFF: //é o perímetro. É como //cada um sendo um.
		MICHAEL: //Um, dois, três, quarto, cinco, seis, sete. [apontando para o papel] [Jeff coça a cabeça.]
		ROMINA: Está certo.
		MICHAEL: Não há jeito de você evitar isso -
		JEFF: //indo sete blocos.
		ROMINA: //Não, sim. Eu entendo.
		MICHAEL: E para baixo tudo isso porque você não pode ir diagonalmente. Não pode-
		JEFF: Sim.
		MICHAEL: Não pode evitar isso, então-
		JEFF: Quero dizer, é a maneira mais lógica, eu acho, para dizer isso. Certo? E eles querem saber quanto.

Figura 4. Codificando e Construindo o Enredo. Codificando pelos protótipos e protocolo de Dörfler. O comentário fornece elementos para um enredo.

Exemplo: Protocolo

Tempo	Código	Comentário e Excerto da Transcrição
		O Pesquisador 2 disse aos estudantes que suas explicações não tornaram claro para ele como e porque o número de menores rotas para os pontos de interseção na linhas da grade corresponde ao Triângulo de Pascal. A Pesquisadora 1 sugeriu que eles tomassem alguns minutos para pensar sobre a pergunta do Pesquisador 2. Há evidência que Michael entendeu a pergunta do Pesquisador 2 pela sua afirmação aos outros: “Ele (Pesquisador 2) quer saber porque... sem dizer ‘oh, é só seguir um padrão’.” Enquanto os estudantes discutiam porque o Triângulo de Pascal funcionava para o Problema do Táxi., Romina desenhou sobre a representação de Michael do Triângulo de Pascal e preencheu umas linhas da grade numa transparência com números representando o número de

1:24:16		<p>menores rotas para os pontos de intersecção. Com ajuda de Michael, Romina construiu um protocolo para um isomorfismo entre o Problema das Torres e o Problema do Táxi, especificando porque o Triângulo de Pascal se relaciona com ele. Romina informa à Pesquisadora 1 que eles estão prontos para responder à pergunta do Pesquisador 2 e pede a ele para refazê-la.</p> <p>PESQUISADOR 2: Há, minha pergunta foi que você disse que encontrou o Triângulo de Pascal e hum, não ficou claro para mim que se você fosse, vamos tomar-</p> <p>MICHAEL: Você quer algo como uma razão por que – como eles se relacionam ?</p> <p>PEQUISADOR 2: Sim.</p> <p>ROMINA: OK.</p> <p>MICHAEL: Não porque parece? Você quer saber porquê.</p> <p>ROMINA: Agora nós pegamos qualquer ponto. Digamos que pegássemos este ponto. Não importa como você chega a este ponto.</p> <p>MICHAEL: Faça o seis um. O seis um -</p> <p>ROMINA: Bem, faremos o seis e quatro.</p> <p>MICHAEL: Está certo.</p> <p>ROMINA: OK, para este ponto você precisa pegar pelo menos – você tem que fazer quatro movimentos. Esta é a menor quantidade de movimentos porque é apenas um simples um, dois, três, quatro. Então isto significa que é- digamos que você, nós, estivéssemos relacionando para estes quatro movimentos quatro blocos iguais. Então, eu teria que descer para a área do bloco quatro. Então, é um, dois, três, quatro. E agora você está indo na horizontal três e para baixo um. Ou – então- [ela está ilustrando os movimentos na linhas da grade do táxi e apontando para os números na linhas da grade e no triângulo redesenhado.</p> <p>MICHAEL: Não há maneira possível pela qual que você poderia-</p> <p>ROMINA: //Fazer outra coisa.</p> <p>MICHAEL: //Você tem que – não importa como ou qual caminho você</p>
1:24:40	P	

1:25:56		<p>for, você tem que ir três e então um.</p> <p>ROMINA: Certo. Em qualquer movimento você irá um para baixo e três na horizontal, não importa – em qualquer direção que você tomar. Então o três na horizontal e um para baixo relacionam-se para três cores e então-</p> <p>MICHAEL: De um-</p> <p>ROMINA: Três de uma cor e uma de outra. Então você vai e olha aqui dentro. Digamos – OK, aqui está com uma cor só. Isto é com um de uma cor.</p> <p>MICHAEL: Isto – isto não é nada.</p> <p>ROMINA: Não é tudo uma cor mas não estamos usando isso porque você não pode ir todos na mesma direção. É tudo uma cor. Com um de uma cor e três de outra. Então é quatro e é o que nós temos, e se você descesse aqui, este é dois e dois e este é três e um que é a mesma coisa. Então há o seu outro quatro. E se você for para o sexto, a única forma de chegar lá é por quatro movimentos. Vai um, dois, três, quatro. Então você está no bloco quatro mas desta vez você tem que pegar, não importa o que faça, você vai dois na horizontal e dois prá baixo de qualquer maneira que fizer. Assim, seria dois e dois que é seu seis mas você ainda está no bloco quatro [Inaudível]. Relacionando a linhas da grade do táxi com o Triângulo de Pascal.</p>
---------	--	---

Compondo a narrativa

Embora em nosso modelo uma fase de narrativa apareça por último, a narração e outras ações interpretativas começam usualmente no início da pesquisa. As questões dos pesquisadores, assim como os procedimentos de reunião dos dados e as mídias, implicam, explícita ou implicitamente, escolhas alimentadas por perspectivas teóricas conscientes ou inconscientes, abertas ou ocultas. É neste sentido que a construção de uma narrativa começa no início da pesquisa e é responsável pela razão pela qual, em algum lugar no interior do relatório de pesquisa, os pesquisadores delineiam seus vieses teóricos. Não obstante as decisões de amostragem que ocorrem antes e durante a

agregação de dados, a escrita ocorre em todas as fases de nosso modelo de pesquisa, embora nosso modelo anuncie que discussões interpretativas e resultados acontecem depois da codificação dos dados. Obviamente, a escrita de um memorando analítico é um exemplo óbvio de pesquisadores engajando-se na interpretação antes desta fase. Todavia, neste estágio, os pesquisadores visualizam, de qualquer parte do material gravado, o todo, a partir dos dados sobre os quais as questões de pesquisa estão sendo atacadas. Eles decompõem esta totalidade em segmentos menores, interpretam estes segmentos à luz do todo, recompõem o todo à luz de um enredo e exploram uma interpretação particular do todo usando os dados como evidência, produzindo, dessa forma, uma narrativa escrita (ERICKSON, 1992). Mesmo no processo de escrita, o pesquisador é engajado em alguma forma de análise de dados, revisitando constantemente os dados e refinando interpretações anteriores. Além disso, é importante notar que, conforme mencionado anteriormente, avanços nas tecnologias de *streaming* de vídeo e *hyperlinks* na WWW permitem aos pesquisadores integrar *clips* de vídeo em relatórios que podem ser acessados nesta rede.⁹

Conclusão

Revisamos alguma literatura sobre o uso do vídeo na pesquisa sobre ensino e aprendizagem matemática e delineamos um modelo analítico evolvente para uso em investigações com dados de vídeo do desenvolvimento do pensamento matemático. Enquanto reflete sobre o modelo, é possível ao leitor reconhecer estágios familiares da análise de dados, citados, somente aqui, de maneira distinta. Conquanto isso seja verdade, nossa intenção é enfatizar como a pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento matemático é aprimorada a partir dos dados de vídeo e como nosso modelo se aproveita desse aprimoramento.

Uma outra questão na apresentação do nosso modelo concerne à sua forma seqüencial. Não pretendemos sugerir uma ordem fixa, imutável, sobre a qual a análise de dados do vídeo deve proceder. Na verdade, reconhecemos que a análise de dados de vídeo pode seguir uma seqüência diferente e que certas fases analíticas podem não ser enfatizadas ou incluídas na análise de alguma forma. Alguns pesquisadores preferem

⁹ Isto pode ser feito, por exemplo, com o aplicativo VideoPaper Builder 2, <http://vpb.concord.org/>.

não anotar descrições do conteúdo dos vídeos enquanto assistem a eles para se familiarizar com os dados. Em vez disso, podem saltar a fase descritiva e prosseguir diretamente para assistir à gravação e identificar eventos críticos. Mesmo quando todas as fases ocorrem na análise, os pesquisadores podem ir e voltar ciclicamente, revisitando fases do modelo em suas tentativas de gerar narrativas criteriosas e coerentes do pensamento matemático dos estudantes.

É importante notar que o nosso modelo apóia-se em suposições teóricas particulares concernentes ao pensamento matemático e à prática de pesquisa. Ao longo dos anos, teorias sobre o desenvolvimento de representações mentais (DAVIS et al., 1992) sobre o desenvolvimento da compreensão matemática (PIRIE; KIEREN, 1994; PIRIE, 1996), e mesmo idéias recentes sobre significados matemáticos (DÖRFLER, 2000) têm contribuído para o desenvolvimento do modelo, especialmente sobre questões relacionadas à decisão de como encarar o estudo do pensamento matemático. Por exemplo, a codificação para representações matemáticas se apóia na suposição de que “essencial para fazer matemática é a construção de (re) apresentações externas e internas” (Dörfler e Maher, em revisão). Isso implica examinar cuidadosamente as exteriorizações do pensamento dos estudantes, sejam elas por meio de gestos, discursos ou trabalhos escritos.

Nosso modelo analítico desenvolve-se também sobre suposições relativas à prática de pesquisa. Por exemplo, em contraposição à pesquisa que foca a investigação de concepções errôneas dos estudantes ou do que eles, de qualquer forma, não fazem corretamente, uma característica distinguida de questões cultivadas em nosso programa de pesquisa concerne à compreensão, ou seja, a como os estudantes estão socialmente engajados em tarefas matemáticas, *que* idéias matemáticas os estudantes individualmente constroem, e *como* eles empregam suas idéias de maneira a alcançar um desenvolvimento em seu pensamento matemático. Em nosso programa de pesquisa, como (MAHER; SPEISER, 2001) especificam, o “o que” é descritivo e o “como” narrativo. Além disso, a perspectiva “o que” e “como” de nosso programa, e, conseqüentemente, de nosso modelo analítico, informa os códigos que desenvolvemos para sinalizar eventos críticos assim como quais eventos nós consideramos críticos. Adicionalmente, reconhecemos que pesquisas sobre um fenômeno tão complexo como o desenvolvimento do pensamento matemático não é um processo linear, unidirecional.

Ele é um processo especialmente complexo, cíclico e recursivo que requer múltiplas visitas aos dados assim como trocas colaborativas entre pesquisadores com diferentes visões analíticas e teóricas, de forma a fornecer narrativas e descrições valiosas do fenômeno estudado (MAHER; DAVIS, 1996; PIRIE; KIEREN, 1994). Conforme já indicado, essas práticas de pesquisa são substancialmente aprimoradas pelo modelo analítico evolvente que apresentamos.

Neste artigo, focamos o uso de dados de vídeo em estudos de pequena escala. Obviamente, estudos em larga escala também são importantes e permitem aos pesquisadores generalizar resultados para populações maiores. Todavia, sustentamos que eles devem ser baseados em análises detalhadas e cuidadosas e que estejam atentas à complexidade das variáveis que afetam a aprendizagem e o ensino de Matemática. Por essa razão, sustentamos que cuidadosos estudos etnográficos, observacionais ou não, devem preceder e informar os estudos de larga escala. O modelo que propomos é um passo adiante no desenvolvimento de uma abordagem analítica, usando dados de vídeo, para investigações observacionais em relação ao desenvolvimento de idéias matemáticas e de formas de raciocínio dos estudantes.

Referências

ALASUUTARI, P. Theorizing in qualitative research: a cultural studies perspective. **Qualitative Inquiry**, v. 2 n. 4, p. 371-384, 1996.

ALSTON, A.; MAHER, C. A. Children's connections among representations of mathematical ideas. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 14., 1990, Mexico. **Proceedings...** Mexico: PME Group, 1990. v. 2, p. 3-10.

ATKINSON, J. M.; HERITAGE, J. (Ed.). **Structures of social action: studies in conversational analysis**. Cambridge: Cambridge University, 1984.

BOTTORFF, J. L. Using videotaped recordings in qualitative research. In: MORSE, J. M. (Ed.). **Critical issues in qualitative research methods**. Thousand Oaks, CA: Sage, 1994. p. 244-261.

BRUNER, J. **The process of education**. Cambridge: Harvard University, 1960/1977.

CHARMAZ, K. The Grounded Theory method: an explanation and interpretation. In: EMERSON, R. M. (Ed.). **Contemporary field research: a collection of readings**. Boston: Little Brown, 1983. p. 109-126.

CHARMAZ, K.; MITCHELL, R. G. Grounded theory in ethnography. In: ATKINSON, P.; COFFEY, A.; DELAMONT, S. (Ed.). **Handbook of ethnography**. London: Sage, 2001. p. 160-174.

CLARKE, D. Complementary accounts methodology. In: CLARKE, D. (Ed.). **Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms**. Dordrecht: Kluwer, 2001a.

CLARKE, D. (Ed.). **Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms**. Dordrecht: Kluwer, 2001b.

CLEMENT, J. Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. In: KELLY, A. E.; LESH, R. (Ed.). **Handbook of research data design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 547-589.

COBB, P.; WHITENACK, J. W. A method for conducting longitudinal analysis of classroom videorecordings and transcripts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 30, p. 213-228, 1996.

CORBIN, J.; STRAUSS, A. Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. **Qualitative Sociology**, v. 13, n. 1, , p. 3-21, 1990.

CRESWELL, J. W. **Qualitative inquiry and research design: choosing among five traditions**. Thousand Oaks, Ca: Sage, 1998.

DAVIS, G. E. Children talking about children's mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 1, n. 2, p. 35-42, 1989.

DAVIS, R. B. **Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education**. Norwood: Ablex, 1984.

DAVIS, R. B.; MAHER, C.; MARTINO, A. Using videotapes to study the construction of mathematical knowledge of individual children working in groups. **Journal of Science, Education, and Technology**, v. 1, n. 3, p. 177-189, 1992.

DAVIS, R. B.; MAHER, C. A. What do we do when we 'do mathematics'? In: NODDINGS, N. (Ed.). **Constructivist views of the teaching and learning of mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990. (Monograph, 4).

DAVIS, R. B.; MAHER, C. A. How students think: the role of representations. In: ENGLISH, L. (Ed.). **Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1997. p. 93-115.

DÖRFLER, W. Means for meaning. In: COBB, P.; YACKEL, E.; McCLAIN, K. (Ed.). **Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 99-131.

ERICKSON, F. The interface between ethnography and microanalysis. In: LeCOMPTE, M. D.; MILLROY, W. L.; PREISSLE, J. (Ed.). **The handbook of qualitative research in education**. San Diego: Academic Press, 1992. p. 201-225.

GATTEGNO, C. **What we owe children: the subordination of teaching to learning**. New York: Avon, 1970.

- GATTEGNO, C. **The commonsense of teaching mathematics**. New York: Educational Solutions, 1974.
- GATTEGNO, C. **The science of education**. Part 1: Theoretical considerations. New York: Educational Solutions, 1987.
- GATTEGNO, C. **The science of education**. Part 2B: The awareness of mathematization. New York: Educational Solution, 1988.
- GINSBURG, H. P. **Entering the child's mind**: the clinical interview in psychological research and practice. New York: Cambridge, 1997.
- GLASER, B. G.; STRAUSS, A. L. **The discovery of grounded theory**: strategies for qualitative research. New York: Aldine, 1967.
- GRIMSHAW, A. D. Sound-image data records for research on social interaction: Some questions and answers. **Sociological Methods and Research**, v. 11, p. 121-144, 1982.
- HALL, R. Videorecording as theory. In: LESH, R. (Ed.). **Handbook of research data design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. P. 647-664.
- HAMMERSLEY, M.; ATKINSON, P. **Ethnography**: principles in practice. London: Tavistock, 1983.
- HAYDAR, H. N. **The effect of clinical assessment training on teachers' instructional efficacy**. 2002. Unpublished doctoral dissertation, Teachers College, Columbia University.
- JEFFERSON, G. Transcript notation. In: HERITAGE, J. (Ed.). **Structures of social action**: studies in conversation analysis. New York: Cambridge University, 1984. p. ix-xvi.
- KICZEK, R. D. **Tracing the development of probabilistic thinking**: profiles from a longitudinal study. 2000. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick.
- KOSCHMANN, T.; GLENN, P.; CONLEE, M. When is a problem-based tutorial not a tutorial? Analyzing the tutor's role in the emergence of a learning issue. In: HMELO, C. E. (Ed.). **Problem-based learning**: a research perspective on learning interactions. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 53-74.
- KRAUSE, E. F. **Taxicab geometry**: an adventure in non-Euclidean geometry. Mineola, NY: Dover, 1986.
- LESH, R.; LEHRER, R. Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. In: LESH, R. (Ed.). **Handbook of research data design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 665-708.
- MAHER, C. A. Kommunikation och konstruktivistisk undervisning [Communication and constructivist teaching]. In: ENGRSTOM, A. (Ed.). **Matematik och reflektion**: en introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken. Lund, Sweden: Studenlitteratur, 1998. p. 124-143.
- MAHER, C. A. How students structure their own investigations and educate us: What we've learned from a fourteen year study. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP

- FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich.
Proceedings... Norwich, United Kingdom: School of Education and Professional Development/University of East Anglia, 2002. v. 1, p. 31-46.
- MAHER, C. A.; ALSTON, A. Building a representation of multiplication: a description and analysis of Angel's reconstruction. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 15., 1991, Blacksburg. **Proceedings...** Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic University, 1991. p. 70-76.
- MAHER, C. A.; DAVIS, R. B. Children's explorations leading to proof. In: MATHEMATICAL SCIENCES INSTITUTE OF EDUCATION CONFERENCE ON PROOF, 1996, **Proceedings...** : University of London, 1996.
- MAHER, C. A.; MARTINO, A. M. The development of the idea of mathematical proof: a 5-year case study. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 27, n. 2, p. 194-214, 1996a.
- MAHER, C. A.; MARTINO, A. M. Young children invent methods of proof: the gang of four. In: NESHER, P.; STEFFE, L. P.; COBB, P.; GREER, B.; GOLDEN, J. (Ed.). **Theories of mathematical learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996b. p. 431-447.
- MAHER, C. A.; MARTINO, A. M. From patterns to theories: conditions for conceptual change. **Journal of Mathematical Behavior**, Local, v. 19, n. 2, p. 247-271, 2000.
- MAHER, C. A.; PANTOZZI, R. S.; MARTINO, A. M.; STEENCKEN, E. P.; DEMING, L. S. **Analyzing students' personal histories: foundations of mathematical ideas**. New York, 1996. Paper presented to the American Educational Research Association.
- MAHER, C. A.; SPEISER, R. How far can you go with block tower? Stephanie's intellectual development. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 16, n. 2, p. 125-132, 1997.
- MAHER, C. A.; SPEISER, R. **Polynomials, Pascal's triangle and the building of isomorphisms**. 2001. Paper presented at the American Educational Research Association.
- MARTIN, L. C. **The nature of the folding back phenomenon within the Pirie-Kieren theory for the growth of mathematical understanding and the associated implications for teachers and learners of mathematics**. 1999. Unpublished doctoral dissertation, University of Oxford, Oxford, England.
- MARTINO, A. M.; MAHER, C. A. Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, , v. 18, n. 1, p. 53-78, 1999.
- MCDERMOTT, R. P.; GOSPODINOFF, K.; ARON, J. Criteria for an ethnographically adequate description of concerted activities and their contexts. **Semiotica**, The Hague, n. 24, p. 245-275, 1978.
- MENGER, K. **You will like geometry**: a guide book for the Illinois Institute of Technology geometry exhibition at the Museum of Science and Industry. Chicago: 1952.
- MENGER, K. **Selected papers in logic and foundations, didactics, economics**. Dordrecht: D. Reidel, 1979.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative data analysis: an expanded sourcebook**. 2nd ed. Thousand Oaks, CA: Sage, 1994.

PIRIE, S. Understanding: instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised ...? How can we know? **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 8, n. 3, p. 2-6, 1988.

PIRIE, S.; KIEREN, T. A recursive theory of mathematical understanding. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 9, n. 3, p. 7-11, 1989.

PIRIE, S.; KIEREN, T. Growth in mathematical understanding: how can we characterize it and how can we represent it? **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 26, n. 2-3, p. 165-190, 1994.

PIRIE, S. E. B. **What are the data? An exploration of the use of video-recording as a data gathering tool in the mathematics classroom**. 1996. Paper presented at the Sixteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - North America, Florida State University, Panama City.

PIRIE, S. E. B. Where do we go from here? In: TEPPON, A. R. (Ed.). **Qualitative research methods in mathematics education**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998. p. 156-163. (Monograph, 9).

PIRIE, S. E. B. Analysis, lies, and videotape. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (SNOWBIRD, UTAH), 23., 2001, Columbus. **Proceedings...** Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 2001. v. 1, p. 346-350.

POWELL, A. B. **"So let's prove it!"**: emergent and elaborated mathematical ideas and reasoning in the discourse and inscriptions of learners engaged in a combinatorial task. 2003. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers, The State University of New Jersey.

POWELL, A. B.; MAHER, C. A. Inquiry into the interlocation of students engaged with mathematics: appreciating links between research and practice. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (ATHENS, GEORGIA), 24., 2002, Columbus. **Proceedings...** Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 2002. v. 1, p. 317-329.

POWELL, A. B.; MAHER, C. A. Heuristics of twelfth graders building isomorphisms. In: JOINT MEETING OF PME AND PMENA, 2003, Honolulu. **Proceedings...** Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai'i, 2003. v. 4, p. 23-30.

ROSCHELLE, J. Choosing and using video equipment for data collection. In: LESH, R. (Ed.). **Handbook of research data design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 709-731.

SPEISER, B.; WALTER, C. Getting at the mathematics: Sara's journal. In: JOINT MEETING OF PME AND PMENA, 2003, Honolulu. **Proceedings...** Honolulu: CRDG, College of Education, University of Hawai'i, 2003. v. 4, p. 245-249.

SPEISER, R.; WALTER, C. **Five women build a number system**. Stamford, CT: Ablex, 2000.

STEENCKEN, E. P. **Tracing the growth of understanding of fraction ideas**: a fourth grade case study. 2001. Unpublished Published doctoral dissertation. Dissertation Abstracts International 3009381, Rutgers University.

STEENCKEN, E. P.; MAHER, C. A. Tracing fourth grader's learning of fractions: episodes from a yearlong teaching experiment. **The Journal for Mathematical Behavior**. In press.

STIGLER, J. W.; GONZALES, P.; KAWANAKA, T.; KNOLL, S.; SERRANO, A. **The TIMSS Videotape Classroom Study**: methods and findings from an exploratory research project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, 1999. (Research and Development Report No. NCES 99-074).

STIGLER, J. W.; HIEBERT, J. **The teaching gap**: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: The Free Press, 1999.

SUCHMAN, L. A.; TRIGG, R. H. Understanding practice: video as a medium for reflection and design. In: GREENBAUM, J.; KYNG, M. (Ed.). **Design at work: cooperative design of computer systems**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates, 1991. p. 65-89.

WALTER, J. G. Building mathematical meaning without teacher intervention: analysis of the discourse of precalculus students. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (SNOWBIRD, UTAH), 24., 2001, Columbus. **Proceedings**... Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 2001. v. 1, p. 539-548.

WALTER, J. G.; MAHER, C. A. Student-to-student questioning in the development of mathematical understanding: six high school students mathematizing a shell. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (ATHENS, GEORGIA), 24., 2002, Columbus. **Proceedings**... Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 2002. v. 2, p. 1009-1018.