ISBN 978-85-89082-23-5

Análise da Transposição Didática: um exemplo com a raiz quadrada[1][2]

Teresa Assude[3]

Resumo

Um aluno, em situação de aprendizagem duma noção, por exemplo a raiz quadrada, é confrontado não só ao objeto mas a todo um conjunto de outros objetos relacionados com a raiz quadrada que se encontram na sua vizinhança. A relação pessoal do aluno a esse objeto é determinada, em parte, pela relação institucional à raiz quadrada, isto é, pela organização dos "gestos" relativos ao conjunto dos objetos e das inter-relações que se encontram em torno da raiz quadrada.

A análise da relação institucional não pode ser realizada sem inserir os objetos e as relações institucionais num quadro mais amplo que evidencie a sua dependência da instituição onde eles aparecem. Nesta perspectiva a análise da transposição didática permite compreender e estudar a origem e a formação dos conjuntos de objetos e das inter-relações que determinam as diferentes relações institucionais ao objeto raiz quadrada.

1 - Alguns "gestos"

Um dos "gestos" que os alunos portugueses do 9° ano de escolaridade (15 anos aproximadamente) devem poder fazer relativamente ao cálculo de radicais é o seguinte (exemplo tirado dum dos manuais desse ano):

$$2\sqrt{3} \; x \; 4\sqrt{2} = 2 \; x \; 4 \; x \; \sqrt{3} \; x \; \sqrt{2} = 8\sqrt{3x2} = 8\sqrt{6}$$

Os alunos devem saber manipular o produto de radicais, neste caso quadrático, e, além disso, comutarem os termos da multiplicação mesmo se esses gestos são feitos implicitamente. Este tipo de "gestos" é retomado para radicais de ordem n e mesmo para produtos de radicais de ordem diferente. Os gestos que os alunos devem saber fazer são relativos a um conjunto de objetos e de interrelações entre esses objetos: neste caso os objetos são os radicais quadráticos, em particular os radicais de números inteiros representativos de certos irracionais; as inter-relações são constituídas pela manipulação simultânea dos produtos de radicais e da comutação dos termos num produto. O resultado

[1] Comunicação apresentada no 1ª Congresso Iberoamericano de Educação Matemática – Sevilha/1990

[2] Digitalizado por Carolina Augusta Assumpção Gouveia e Thiago Pedro Pinto, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[3] IREM d'Aix - Marseille, França

final esperado do aluno é que ele saiba manipular corretamente esses objetos e essas interrelações de modo que ele obtenha a solução desejada.

A propósito da mesma expressão numérica $2\sqrt{3}$ x $4\sqrt{2}$ podemos pôr outra questões, por exemplo a do cálculo aproximado a menos duma décima de cada um dos fatores da expressão, e a resposta esperada dos alunos vai ser diferente daquela apresentada mais acima:

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$2 \times 1{,}7 < 2\sqrt{3} < 2 \times 1{,}8$	$4 \times 1{,}4 < 4\sqrt{2} < 4 \times 1{,}5$
$3{,}4 < 2\sqrt{3} < 3{,}6$	$5{,}6 < 4\sqrt{2} < 6{,}0$

e a solução esperada do aluno será:

$3{,}4 \times 5{,}6 < 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} < 3{,}6 \times 6{,}0$

$19{,}04 < 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} < 21{,}60$

Se compararmos as duas respostas esperadas, vê-se que elas não são equivalentes e os gestos que os alunos devem fazer não são os mesmos apesar da expressão inicial ser a mesma. O que muda no segundo exemplo relativamente ao primeiro são os objetos e as interrelações que estão na vizinhança da raiz quadrada. Neste último exemplo, além do produto de radicais os alunos devem apresentar uma aproximação decimal: a noção de aproximação e um novo objeto que vem modificar a relação que os alunos devem ter com a raiz quadrada. Consequentemente a complexidade dos objetos e das interrelações que os alunos devem manipular aumenta.

A questão que pomos é a seguinte: afinal o que é conhecer a raiz quadrada nesta instituição? Duma certa maneira podemos dizer que conhecer a raiz quadrada é saber manipular de várias maneiras a raiz quadrada consoante o contexto onde a vamos encontrar.

A descrição dos gestos que o aluno deverá saber fazer assim como os resultados esperados desses gestos permitem evidenciar os diferentes conjuntos de objetos e de inter-relações que se encontram na vizinhança da raiz quadrada. A organização desses conjuntos de "gestos" e portanto à organização dos objetos e das inter-relações chamaremos *relação institucional* ao objeto raiz quadrada na instituição considerada.

2 - A relação institucional como função da instituição

Encontramos a seguinte igualdade num livro de Matemática:

$$\frac{71 + 29\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{103}{5} + \frac{42}{5}\sqrt{6}$$

e ela poderia muito bem ser encontrada nas mãos dum aluno do 9° ano de escolaridade. O tipo de gestos que permite chegar a solução tem mesmo um nome para o designar: chama-se "racionalizar o denominador". No entanto, não foi nesse ano de escolaridade que encontramos esta igualdade e podemos mostrá-lo através dum inquérito rápido e empírico sobre os objetos de saber: quais são os objetos que encontramos na vizinhança desta igualdade?

Se exploramos um pouco, encontraremos a noção de $Q[\sqrt{6}]$, de corpo quadrático e de inteiro dum corpo quadrático. Basta-nos este inquérito empírico para concluir que não será num livro destinado aos alunos do 9° ano de escolaridade que encontraremos esta igualdade. A noção de corpo quadrático $Q[\sqrt{d}]$, isto é, os conjuntos formados por elementos da forma $a + b\sqrt{d}$, com a e b racionais e d inteiro, não quadrado perfeito, munidos da estrutura de corpo, não está integrada nos programas de 9° ano de escolaridade no sistema de ensino em Portugal.

Uma noção fundamental para detectar os diferentes lugares onde encontramos um certo objeto e uma noção utilizada na ecologia que nos aplicaremos voluntariamente no nosso campo pela sua pertinência: é a noção de *habitat.* Ela permite-nos identificar os lugares onde encontramos a raiz quadrada e, aí, analisar os diferentes objetos e inter-relações que estão presentes de modo a especificar a relação institucional a raiz quadrada nas diferentes partes da instituição considerada.

O habitat relativo ao último exemplo e um livro de Matemática destinado aos estudantes universitários americanos denominado "Introduction to Number Theory" de Harold Stark.

Identificamos dois habitats da raiz quadrada nos quais não encontramos os mesmos objetos e as mesmas inter-relações relativamente à raiz quadrada e, mesmo, no mesmo habitat (9° ano de escolaridade) os gestos que os alunos devem fazer não são equivalentes como vimos mais acima: a relação institucional à raiz quadrada é uma função desses objetos e dessas inter-relações que se encontram na sua vizinhança, de tal modo que, se introduzirmos num certo habitat outros objetos e outras inter-relações, podemos modificar completamente a relação institucional à raiz quadrada.

Imaginemos que introduzíamos a noção de aproximação na vizinhança da raiz quadrada no âmbito do estudo dos corpos quadráticos no livro "Introduction to Number Theory", por exemplo em vez de escrever 1 + $\sqrt{6}$ considerávamos uma aproximação de $\sqrt{6} \cong 2{,}449$; dada a aproximação teríamos em vez do elementos do corpo Q [$\sqrt{6}$] o elemento 1 +2,449 = 3,499 que é precisamente um elementos do corpo dos racionais Q.

Se substituirmos $\sqrt{d}$ por uma aproximação racional α, o corpo Q [α] não é outro senão o corpo Q dos racionais. Assim os corpos quadráticos perderiam uma das suas razões de existência ao transformar-se no corpo dos racionais: a noção de aproximação e neste contexto um elemento perturbador, pois as inter-relações que estabeleceria modificariam completamente as inter-relações iniciais existentes e específicas a este habitat dos corpos quadráticos.

Duma forma análoga poderíamos dar um exemplo relativo ao 8° ano de escolaridade no âmbito da racionalização de denominadores. A introdução da noção de aproximação no âmbito duma expressão para racionalizar os denominadores modificaria completamente o exercício que deixaria de ser um cálculo com radicais para ser um quociente de decimais. Por exemplo, passaríamos de:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7 + \sqrt{3}$$

a

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7 + \sqrt{3}$$

quociente de dois números decimais, expressão que levanta outras questões que a expressão inicial, e o resultado final é diferente do resultado do primeiro caso.

Uma "pequena" mudança nos objetos e portanto das inter-relações presentes num certo habitat pode ter consequências imprevistas, mesmo na permanência desse mesmo habitat. Quando perguntamos a um aluno, numa dada instituição, de efetuar certos gestos relativamente a um certo objeto de saber, não podemos abstrair-nos do ambiente no qual aparece a raiz quadrada porque as respostas do aluno vão estar, em parte, determinadas pelos conjuntos de objetos e de inter-relações existentes na sua vizinhança, isto é, pela relação institucional a este objeto na instituição dada. Numa dada instituição pode haver várias relações institucionais a um mesmo objecto consoantes os habitats onde esse objecto se encontra e as inter-relações e os objetos existentes. A relação institucional à raiz quadrada no sistema de ensino em Portugal não é sempre a mesma, pode variar e mudar completamente.

3 - Alguns elementos sobre o objeto "raiz quadrada" no sistema de ensino

No sistema de ensino em Portugal a raiz quadrada aparece nas turmas do 8° ano de escolaridade relacionada com o problema da extração da raiz quadrada dum número. Os alunos Portugueses devem (mesmo se esta situação vai mudar com os novos programas) poder responder a pergunta "extrair a raiz quadrada dum número" através do algoritmo tradicional de divisão do número em classes de dois algarismos.

Este algoritmo tem uma longa existência no ensino da Matemática em muitos países, e esta tradição vem da organização clássica do ensino das operações que começa primeiro pelo estudo das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) para depois continuar com o estudo duma quinta operação que é precisamente e a extração da raiz quadrada. Esta organização é utilizada, ao menos, desde o século XVII e a raiz quadrada é "quase" que uma continuação da divisão em termos conceptuais. A analogia entre o algoritmo da divisão e o algoritmo da extração da raiz quadrada aparece com a criação dos números decimais que permitiram a unificação do campo numérico.

No ensino, a organização da aritmética, da álgebra clássica e da geometria permaneceu durante muito tempo sem grandes mudanças até a reforma das matemáticas modernas que teve efeitos diferentes consoante os países. Por exemplo, em França, o algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada desapareceu oficialmente dos programas e, em Portugal, ele existe ainda nos programas e só na reforma é que a sua presença está a ser posta em causa. A resposta dos autores de programas portugueses e franceses não foi a mesma relativamente à introdução das raízes quadradas nos programas que emergiram da reforma das matemáticas modernas. Os franceses introduziram a raiz quadrada no campo das funções (nós analisaremos mais adiante que essa introdução não foi aproveitada em todas as suas potencialidades) enquanto os portugueses organizaram o ensino da Matemática através da construção dos números reais, construção essa que implica a supressão das impossibilidades de certas equações: assim a raiz quadrada permite a resolução das equações do tipo $x^2 = a$, $a \geq 0$. Neste contexto o algoritmo de extração da raiz quadrada continuou ainda a ter uma validade: ele não é mais a quinta operação, mas é um dos métodos de cálculo dos valores aproximados das soluções das equações acima citadas e da possibilidade da existência de certas soluções.

A raiz quadrada é um objecto matemático suficientemente rico para que possa aparecer sob dois aspectos diferentes, seja como fonte de disfuncionamentos, seja como fonte geradora de novos objetos como por exemplo os números complexos. Na formação matemática a raiz quadrada é um dos primeiros contactos dos alunos com um objeto duma certa complexidade, seja pelas dificuldades conceptuais que também encontramos ao longo da História da Matemática (a crise dos irracionais dos pitagóricos só foi resolvida no século XIX com as construções axiomáticas dos números reais) seja pela complexidade ostensiva das expressões, seja ainda pela complexidade de manipulação, por exemplo $\sqrt{a+b}$ em geral não e equivalente a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Este duplo aspecto confere à raiz quadrada uma certa flexibilidade e adaptação que permite a sua inserção em vários habitats diferentes consoante as instituições e os momentos na história dum certo sistema de ensino. A raiz quadrada pode ser inserida no fim do estudo da aritmética elementar como a quinta das operações aritméticas, mas ela pode também ser inserida no estudo da álgebra clássica como o princípio do estudo das equações do segundo grau ou duma forma global do estudo dos problemas do segundo grau ou ainda ela pode ser integrada no estudo das funções.

No ensino Francês atual, para muitos alunos de 4ème (correspondente ao 8° ano de escolaridade) a raiz quadrada aparece primeiro como a tecla da calculadora. Poderíamos apresentar outros exemplos da sua integração num certo currículo mas o que nos interessa é questionar-nos do porquê dessas diferenças.

4 - A transposição didática: um fenômeno didático

Por que essas diferenças? Donde é que elas vêm?

A emergência da relação pessoal dum aluno a um certo objeto de saber deve ser integrada num quadro mais largo do que a relação do aluno com o professor, mesmo se esta relação é fundamental. É necessário ter em conta a instituição onde o aluno está inserido e por isso nós podemos levantar a hipótese segundo a qual um aluno português não responderia da mesma maneira a questão "extrair a raiz quadrada de 13463" do que um aluno francês.

A transposição didática permite compreender e analisar as diferenças entre as instituições, nomeadamente as instituições escolares. A transposição didática é o trabalho pelo qual o saber das esferas dos matemáticos é transformado em saber a ensinar ou em saber ensinado. A vida dum objecto no seio de um sistema de ensino obedece a certas leis próprias ao funcionamento do sistema, mas também é regida por certas condições e constrangimentos próprios aos processos da transposição didáctica. A existência ou a ausência dum objeto num certo sistema de ensino vai estar submetida ao trabalho e às pressões da noosfera. A noosfera, termo introduzido por Yves Chevallard, designa a zona fronteiriça entre o sistema de ensino dum lado e, do outro, a sociedade e a esfera dos matemáticos (também dita a esfera sábia). A noosfera é formada pelas associações de professores, pelas sociedades dos matemáticos ou por certos matemáticos, por representantes do Ministério da Educação, pelas diferentes comissões de trabalho, pelos professores, pelos sindicatos enfim, por "tudo" e "todos" que pensam sobre o sistema de ensino.

Atualmente, em Portugal, há uma grande agitação e um grande trabalho da noosfera a propósito das mudanças relativas à implementação da lei de base do sistema educativo e a correspondente reforma dos programas. Por exemplo, neste momento vemos aparecer artigos ou comunicações que defendem ou recusam a introdução das calculadoras no ensino da Matemática assim como o aparecimento de argumentos para a supressão do algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada.

Como já dissemos, o processo de transposição didática permite compreender a passagem do saber dos matemáticos ao saber a ensinar ou a saber ensinado, e este processo e feito em várias etapas. Uma dessas etapas passa-se ao nível da noosfera e da organização dum currículo. A constituição da noosfera, a sua ação, a sua possibilidade de pressionar os centros de decisão dum certo país permite compreender a importância dada a certos aspectos, a certos objetos, a certos problemas, enfim, a escolha duma organização dos objetos a ensinar. Em Portugal, tem havido um certo crescimento das intervenções da noosfera a propósito do ensino da Matemática (não nos esquecemos porém do papel fundamental exercido pelo matemático Sebastião e Silva na reforma das Matemáticas modernas), movimento posto em evidência pela formação da Associação dos Professores de Matemática, por uma maior intervenção da Sociedade Portuguesa de Matemática no ensino da Matemática ou ainda pela criação de certas revistas ou jornais. Este movimento terá certamente conseqüências, apesar de não estarem ainda analisadas, na atual reforma dos programas de Matemática.

Um exemplo de grandes mudanças ao nível da organização do saber a ensinar foi a reforma das Matemáticas modernas que foi um movimento muito amplo ao nível internacional, mas que não teve os mesmos efeitos em todos os países. As diferenças nos processos de transposição didática e, portanto, das diferentes noosferas, permitem compreender a existência e a ausência dum objeto num certo currículo e as diferenças na constituição de uma certa relação institucional: não seremos surpreendidos pelas eventuais diferenças de respostas dos alunos portugueses e dos alunos franceses a uma mesma questão, nomeadamente para estes últimos a ausência da utilização do algoritmo tradicional de extração da raiz quadrada que foi suprimida do ensino escolar nesse momento.

5 - Retorno à raiz quadrada

Relativamente ao fenômeno geral da transposição didática, o estudo do caso da raiz quadrada propõe uma singularidade interessante no sistema de ensino francês. Ela mostra-nos um fenômeno que podemos chamar uma paragem da transposição didática. Como o dissemos mais acima, a raiz quadrada foi considerada durante muito tempo como a quinta das operações da aritmética eliminar, análoga em certos pontos à divisão. A reforma das Matemáticas modernas não modificou muito a situação relativamente a esta questão: dum ponto de vista formal, a raiz quadrada não é mais considerada como uma operação sobre números mas como uma função. No entanto, estamos longe dum aproveitamento possível desta mudança de ponto de vista. A raiz quadrada aparece como um objeto matemático dotado de propriedades estranhas se o comparamos (como tradicionalmente se faz, e como nos o fazemos implicitamente) às outras operações da aritmética. Assim, enquanto se tem $a(b+c) = ab+ac$, ou ainda $a^{b+c} = a^b.a^c$, não se tem uma fórmula simples para a expressão $\sqrt{b+c}$. Mas, se aproxima a raiz quadrada das funções que o aluno encontrará normalmente ao longo dos seus estudos secundários, este caráter estranho e desagradável desaparece. Se, por exemplo, f e uma função afim não linear, não se tem $f(x+y) = f(x)+f(y)$, como não se tem também $\sin(x+y) = \sin(x)+\sin(y)$; além disso, pode-se dizer que é falso escrever que $\sin(xy) = \sin(x).\sin(y)$ enquanto a função raiz quadrada é mais amigável, pois se pode escrever $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ com x e y positivos. Dito doutra forma, o que pode ser estranho relativamente à raiz quadrada é que ela permite que o aluno penetre no universo da manipulação das funções. Ela pode e deveria constituir o objeto de iniciação do aluno ao universo das funções que não cessará de encontrar mais tarde, sin, cos, função exponencial, função logarítmica, etc. Para dizê-lo duma forma vaga, a introdução da raiz quadrada faz entrar o aluno num universo matemático mais rico e mais complexo, e provoca um salto na complexidade das situações matemáticas que é precisamente a sua dificuldade e o seu interesse do ponto de vista da formação matemática do aluno. E ainda neste campo que o aluno encontrará, pela primeira vez duma forma não trivial, o problema da inversão duma função (ou duma fórmula), o mesmo problema que ele encontrará com as funções exponencial e logarítmica ou as funções trigonométricas e suas funções inversas.

Deste ponto de vista, a paragem da transposição didática num estádio onde a raiz quadrada não aparece senão como uma quinta operação da aritmética pobrece a introdução da raiz quadrada e faz perder uma ocasião de formação matemática que nos parece essencial. A escolha atual, nos programas do Collège em França (correspondente ao Unificado) de minorar a raiz quadrada como objeto matemático nos parece deste ponto de vista advir dum erro de julgamento e constituir uma escolha sem futuro.

Referências

Chevallard Y. (1990), **La Transposition Didactique, Du savoir savant au savoir enseigné**, La Pensée sauvage éditions, Grenoble, ière éd. 1985.

Chevallard Y. (1988), **Esquisse d'une théorie formelle du didactique**, in C.Laborde (èd.), Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, pp. 97-106.

Chevallard Y. (1989), **Le concept de rapport au savoir** - Rapport personel, rapport institutionnel, rapport offtciel, Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble.