

Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo

Theory and Practice on Learning Calculus

Maria Clara Rezende Frota¹

Resumo

Entrevistas clínicas conduzidas com três estudantes de Engenharia permitiram mapear suas estratégias de aprendizagem, identificando seus diferentes estilos: um estilo chamado *prático* → *teórico* definido por um movimento a partir da prática em direção à teoria; outro estilo, denominado *teórico* → *prático*, evidenciando um movimento no sentido inverso, da teoria em direção à prática. Essa classificação é sustentada em estudos que mesclaram metodologias qualitativas e quantitativas na categorização de estilos de aprendizagem de Cálculo de estudantes de Engenharia. A resolução de exercícios é elemento chave do método de estudar e aprender Cálculo desses alunos, por vezes como ponto de partida para interlocuções teóricas posteriores, outras vezes como ponto de chegada, usado para compreender a teoria. Os resultados sugerem repensar o ensino e aprendizagem de Matemática a partir de novas perspectivas de utilização da estratégia de resolução de exercícios na sala de aula de Cálculo.

Palavras-chave: Estratégias e Estilos de Aprendizagem de Matemática. Ensino de Cálculo. Resolução de Exercícios.

Abstract

Clinical interviews conducted with engineering students revealed their learning strategies. Strategy preferences can characterize different learning styles: a style named *practical-theoretical* defines a movement from practice to theory; a *theoretical-practical* style indicates a movement in the opposite direction, from theory to practice. Mathematics learning styles of calculus students are supported by a larger previous study conducted

¹ Departamento de Matemática e Estatística e do Mestrado em Ensino da PUC Minas. Endereço para correspondência: PUC Minas – Departamento de Matemática e Estatística. Av. Dom José Gaspar 500, 30535-610, Belo Horizonte - MG. email: mclarafrota@pucminas.br

using both qualitative and quantitative methodologies. Solving exercises is a key element of these students' ways of learning calculus. Sometimes theory is the starting point to further theoretical discussion and sometimes the arrival point, used in order to understand theory. Results point to the need to rethink mathematics education at higher levels considering the role of exercise solving in calculus teaching and learning.

Keywords: Strategies and Styles of Learning Mathematics. Teaching Calculus. Exercise solving.

Introdução

O presente artigo aborda o papel da resolução de exercícios na aprendizagem de Cálculo, trazendo à tona uma discussão da relação teoria e prática nesse aprendizado, inserida num debate acerca de estratégias de aprendizagem de Matemática. O pensamento consensual que associa a aprendizagem de Matemática à resolução de muitos exercícios decorre de crenças e concepções sobre a aprendizagem de Matemática e a Matemática. A falta de uma maior reflexão acerca das estratégias de aprendizagem de Matemática pode levar o estudante a alicerçar suas estratégias nas “verdades sobre como aprender matemática”, que perpassam a sala de aula, revelando crenças variadas, como, por exemplo: matemática se aprende fazendo muitos exercícios; aprender matemática é exercitar; se você não estudar a teoria nunca aprenderá matemática, matemática depende de um estudo teórico árduo etc.

Para discutir essa tensão entre teoria e prática, selecionaram-se três casos, que integram uma pesquisa de doutorado, que mesclou metodologias qualitativas e quantitativas para mapear as estratégias e estilos de aprendizagem de Cálculo de alunos de Engenharia, indagando acerca de fatores que podem influenciar tais estratégias (FROTA, 2002).

Um conjunto significativo de pesquisas desenvolvidas entre alunos universitários busca caracterizar as abordagens de estudo e as estratégias de aprendizagem desses alunos (MARTON; SÄLJÖ, 1976, VERMUNT, 1996, MARTON; BOOTH, 1997, CRAWFORD et al., 1998, TALL, 1997; PINTO, 1998, FROTA, 2002). A pesquisa sobre os estilos de aprendizagem é parte da pesquisa em estilos, que, dentro da psicologia, tem se configurado

como um campo específico de investigações (STERNBERG, 1997, 2000; ZHANG; STERNBERG, 2005).

A primeira seção desse artigo busca conceituar estratégias e estilos de aprendizagem, visando clarear um pouco tais conceitos. A segunda seção detalha a metodologia qualitativa usada para identificar os estilos de aprendizagem de três alunos, Fabrício, Alúcio e Patrícia, a partir de registros de dois tipos de dados: declarações desses alunos acerca das preferências do seu método de estudar matemática e registros decorrentes de um trabalho de acompanhamento dos mesmos, ao lidarem com questões envolvendo o cálculo integral. Os resultados são apresentados com vistas a destacar a tensão entre teoria e prática revelada na fala desses três alunos. Finalmente, algumas possibilidades são apontadas, no sentido de se estabelecer conexões entre a pesquisa relatada em estratégias e estilos de aprendizagem de Matemática e a Educação Matemática no ensino superior.

Estratégias e estilos de aprendizagem: tentativa de conceituação

O esforço de clarear os conceitos de estratégias de aprendizagem evidencia uma estreita correlação entre estratégias, competências e habilidades (NISBET; SHUCKSMITH, 1991; WESTERA, 2001).

Nisbet e Shucksmith (1991) apontam a dificuldade de conceituar estratégias de aprendizagem em seu livro intitulado “*Learning Strategies*”. Para evitar definições insuficientes, por exemplo, que estabelecem que estratégias são os processos que delineiam o desempenho em tarefas cognitivas, os autores preferem estabelecer uma analogia com um time de futebol e seu treinador, para descrever o que entendem por estratégias de aprendizagem. Grande parte de um treino é utilizada com o desenvolvimento de habilidades dos jogadores, como: driblar, tomar e controlar a bola, entre outras. Essas habilidades poderiam ser discutidas posteriormente, com vistas a planejar ataques contra o time adversário. Assim, o planejamento de um ataque consistiria em uma cadeia de habilidades construída em conjunto, a qual poderia ser chamada de estratégia, sendo necessário ao time não apenas exercitar exaustivamente as habilidades, mas desenvolver a flexibilidade, a consciência

e a imaginação em campo, o que os autores chamam de pensamento estratégico. Para eles, o que diferencia positivamente a aprendizagem é a habilidade de monitorar situações com sucesso, uma habilidade que é pouco encorajada na escola.

O ensino visa ao desenvolvimento de estratégias de aprendizagem. Há todo um processo de desenvolvimento de habilidades, isoladas num primeiro momento, mas que se coordenam em competências. As competências em ação constituem as estratégias de aprendizagem (FROTA, 2002, 2003)². Ao estudarem e aprenderem Cálculo, os alunos se movem de maneiras distintas como jogadores em campo, orientando-se por objetivos. As metas pretendidas são variadas, podendo decorrer, entre outros fatores, das crenças e concepções sobre o que seja estudar e aprender matemática e do que seja matemática (FROTA, 2002).

As estratégias de aprendizagem são, em geral, classificadas segundo níveis distintos, do mais operacional ao mais complexo e abstrato. As micro-estratégias relacionam-se a conhecimentos ou habilidades particulares, como, por exemplo, técnicas de leitura ou de processamento de textos, enquanto as macro-estratégias constituem um grupo mais universal. Uma estratégia central relacionada com atitudes e fatores que dependem da motivação consistiria em um estilo pessoal de abordagem da aprendizagem (NISBET; SHUCKSMITH, 1991).

Estratégias de aprendizagem podem, ainda, ser empregadas de maneiras diferentes por uma mesma pessoa. Assim, “cada indivíduo pode utilizar a mesma estratégia de maneira diferenciada, incorporando suas habilidades, aptidões, interesses e, também, suas energias, seu espectro de motivações” (FROTA, 2002, p. 41). Portanto, os estilos de aprendizagem são definidos como estratégias de aprendizagem personalizadas.

Em sua pesquisa, Frota (2002) teve como um dos objetivos mapear as estratégias de aprendizagem, caracterizando estilos de aprendizagem de Matemática de estudantes de Engenharia. Os resultados permitiram verificar que a prática, ou seja, a resolução de exercícios, é elemento chave do método de estudo/aprendizagem de Matemática dos alunos observados, seja como

² Em Frota (2003) pode-se encontrar uma discussão acerca dos conceitos competências e habilidades, no contexto das metas educacionais apontadas nos parâmetros curriculares.

ponto de partida para interlocuções teóricas posteriores, seja como ponto de chegada, a partir da necessidade de entender melhor a teoria. Percebeu-se uma certa preferência e predominância das estratégias adotadas pelos alunos, que poderiam caracterizar um estilo de estudo e aprendizagem. Um estilo chamado *prático* → *teórico* foi caracterizado por um movimento a partir da prática em direção à teoria; outro estilo, denominado *teórico* → *prático* foi definido a partir de um movimento no sentido inverso, da teoria em direção à prática. Um terceiro estilo, denominado *incipiente*, foi detectado entre alguns alunos que, ao longo da pesquisa, demonstraram não ter desenvolvido um método próprio de estudar Cálculo.

Considerações metodológicas

O presente artigo destaca os estilos de aprendizagem de Fabrício, Aluísio e Patrícia (nomes fictícios), estudantes de Engenharia de uma instituição particular de ensino de Minas Gerais, objetivando analisar o papel por eles atribuído ao exercício na aprendizagem de Cálculo, como forma de debater a tensão existente entre teoria e prática na aprendizagem de Matemática.

Na época em que os dados foram coletados (2001), Fabrício, Aluísio e Patrícia cursavam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral II, o primeiro deles estudava no turno da noite e os outros dois no turno da manhã. Os alunos foram acompanhados durante quatro entrevistas, ao longo de dois meses. A primeira delas foi desenvolvida como entrevista semi-estruturada, conduzida a partir de questões norteadoras, entre elas: Como você estuda Matemática? (Cálculo, em particular) Você tem um horário de estudo? Você prefere estudar individualmente ou em grupo? Você faz resumos? Descreva-me o seu método de estudar... Você costuma consultar o livro-texto? E outros livros? Quando você tem alguma dificuldade em Matemática, como você procede? Nas outras três entrevistas, conduzidas na forma de entrevistas clínicas piagetianas, os alunos desenvolveram tarefas consistindo na resolução de exercícios a partir da leitura de um texto matemático no livro didático, abordando o conteúdo *integração*. Nessas entrevistas utilizou-se a técnica

de “pensar em voz alta” (ERICKSON; SIMON, 1993): os exercícios eram resolvidos ou o texto era lido e o aluno relatava as escolhas feitas, os procedimentos adotados, as dúvidas encontradas. Essa metodologia possibilitou que as estratégias de aprendizagem fossem não apenas declaradas, constituindo as representações do aluno sobre o seu método de estudo e aprendizagem, mas contrastadas com o fazer matemático do aluno ao resolver tarefas de matemática.

A tarefa mais relevante para o relato apresentado consistiu num trabalho com exercícios envolvendo o cálculo de integrais. Os exercícios foram apresentados em fichas separadas e não numerados, possibilitando que os alunos manuseassem as fichas, ordenando a seu gosto e apresentando as justificativas da ordenação feita. A numeração aqui adotada (QUADRO 1) visa, tão somente, facilitar a menção aos exercícios, quando do relato do trabalho.

$1) \int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx ; \quad 2) \int_{-1}^1 x^3 dx ; \quad 3) \int_{-1}^1 x^{-2} dx ; \quad 4) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
$5) \int_0^2 x e^{2x^2} dx ; \quad 6) \int \cos x^2 dx ; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$

QUADRO 1 Exercícios propostos para os alunos de Cálculo II

Aos alunos foi solicitado, primeiramente, que dividissem os exercícios em blocos, justificando o agrupamento feito e que ordenassem os blocos e os exercícios dentro dos blocos, para resolver. As entrevistas foram gravadas em áudio e constituíram uma base de dados, juntamente com os registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos e os protocolos de observação, elaborados após cada entrevista. As entrevistas de cada aluno foram analisadas exhaustivamente e as passagens foram indexadas, possibilitando que os alunos fossem classificados de acordo com um estilo de aprendizagem³.

³ A classificação aqui mencionada decorreu de um estudo maior, consistindo em entrevistas desenvolvidas com 19 estudantes, que possibilitaram obter um conjunto de 31 sinalizadores das estratégias de aprendizagem, que evidenciavam uma maior ênfase teórica ou prática no trato das questões ou ainda uma indefinição no seu tratamento, constituindo-se, assim, em caracterizadores de estilos de aprendizagem de Matemática. Além do estudo qualitativo, a aplicação de um questionário a uma população de 529 estudantes de Engenharia possibilitou generalizar os resultados, fortalecendo a caracterização dos três estilos: *teórico* → *prático*; *prático* → *teórico* e *incipiente* (FROTA, 2002).

Estratégias teóricas e práticas para aprender Cálculo

Ao mapear as estratégias de aprendizagem de estudantes de cálculo, a análise de dados indicou que os alunos utilizavam, por vezes, estratégias similares, diferenciando a maneira com que se apropriavam das mesmas. Esse modo particular de utilização das estratégias é que foi, então, denominado um *estilo de aprendizagem*.

Todos os alunos apontaram a estratégia de resolução de exercícios como importante na aprendizagem de Matemática. Alguns partiam de considerações teóricas acerca da tarefa proposta, para depois resolver o exercício, enquanto outros sempre começavam a resolver os exercícios, recorrendo à teoria somente se necessário, para justificar algum procedimento.

Constituíram um primeiro grupo, alunos com um estilo de estudo e aprendizagem, classificado como *teórico* → *prático* e caracterizado por um movimento de partir da teoria, caminhando em direção à prática. Ao desenvolverem as várias tarefas de agrupar exercícios, ordenar blocos e exercícios dentro dos blocos para resolução e selecionar o método de integração a ser utilizado, esses estudantes o faziam a partir de sínteses teóricas construídas. Por exemplo, dividiam as integrais em blocos a partir da classificação em indefinidas ou definidas. Outros alunos agrupavam os exercícios de integral dupla a partir de uma categorização estabelecida com base na análise prévia do domínio de integração e do integrando, classificando o nível de dificuldade da execução dos mesmos a partir de tais categorizações. Demonstravam, de modo geral, desenvoltura ao localizar uma teoria no livro ou no caderno, sendo capazes de estabelecer analogias entre a teoria nova quando da leitura do texto proposta e das teorias já estudadas, bem como explicar o texto lido com as próprias palavras, colocando as dúvidas, avançando na resolução de exercícios novos que exigiam a aplicação de uma nova teoria, no caso os exercícios que fugiam ao padrão daqueles propostos no livro texto, ou que se apresentavam como novidade para o aluno, uma vez que ainda não havia estudado a teoria que fundamentava sua resolução. Mostraram-se capazes, ainda, de acompanhar um diálogo teórico conduzido pela entrevistadora a partir de uma questão, sempre explicando os

procedimentos adotados. Essa característica foi também evidenciada entre alguns alunos do segundo grupo.

Os alunos do segundo grupo foram classificados segundo um estilo de estudo e aprendizagem caracterizado por um movimento de partir da prática, caminhando, algumas vezes, em direção à teoria – denominado como *prático* → *teórico*. De modo geral, diante da mesma tarefa de agrupar exercícios em bloco e ordenar blocos e exercícios para resolução, tais alunos, preferencialmente, o faziam a partir de considerações práticas, do tipo, “esses exercícios considere mais fáceis porque já resolvi vários semelhantes”. A identificação do método mais adequado à resolução de determinada integral foi, por vezes, prejudicada, talvez por falta de sistematizações teóricas mais consistentes, levando ao uso ocasional de estratégias de ensaio e erro na execução de um exercício ou outras vezes ao emprego de uma técnica padrão, como, por exemplo, tentar resolver a integral dupla da maneira apresentada, sem indagar da possibilidade de inversão da ordem de integração ou da mudança de variáveis. Os alunos com um estilo classificado como *prático* → *teórico* demonstraram preferência em recorrer a exemplos na busca de uma estratégia de solução da tarefa, apresentando dificuldades em localizar a teoria no texto, em lidar com as questões novas, por dificuldades de estabelecer relações entre os assuntos já estudados, como, por exemplo, o estudo das séries de potências e a sua aplicação na solução de um exercício.

O relato feito a seguir busca caracterizar os alunos Fabrício, Aluísio e Patrícia quanto ao estilo de aprendizagem de Cálculo. Ao desvelarem o seu método de estudo e aprendizagem, eles possibilitam que se faça uma reflexão acerca do papel da teoria e dos exercícios no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Fabrício e sua estratégia de aprendizagem orientada pela prática.

Fabrício é um aluno que atribui à resolução de exercícios um papel primordial na aprendizagem de Matemática, como podemos verificar a partir de suas palavras:

Aprender matemática, para mim, seria você estudar e fazer exercício, porque é onde você vai desenvolver o raciocínio [...] O meu único entrave é que eu estou com um pouco de

dificuldade em estudar; a cada dia que passa, eu estou tentando melhorar, mas eu estou com muita dificuldade. Prestar atenção e ir na aula eu vou, mas estudar, pegar o hábito de estudo, esta é a minha dificuldade. (FABRÍCIO)

Na atividade de seleção e resolução dos exercícios, Fabrício pareceu um pouco confuso ao explicar por que dividiu os exercícios em dois blocos. O primeiro bloco reunia os exercícios 1, 4, 6 e o segundo bloco os exercícios 2, 3, 5, 7 (QUADRO 1), mas Fabrício não conseguiu explicar que a divisão feita separava, naturalmente, de um lado os exercícios de integrais indefinidas e de outro os exercícios de integrais definidas.

Ele identificou a técnica de integração por substituição de variáveis, a ser usada no exercício 1 e o resolveu, sem problemas. Tentou trabalhar o exercício 6 da mesma maneira, mas, não conseguiu. Folheou o livro na tentativa de achar algum exercício semelhante, achando, a princípio, que poderia usar a relação trigonométrica $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$. Mas não avançou, concordando com a pesquisadora de que havia estudado as técnicas de integração separadamente, não elaborando uma sistematização do assunto, que pudesse facilitar a classificação de uma integral apresentada, de acordo com uma ou outra técnica de resolução exigida. Fabrício ainda identificou que o exercício 4 se resolveria facilmente pela técnica de integração por substituição de variáveis, informando que essa técnica ele havia aprendido.

O aluno ainda considerou que os dois primeiros exercícios do segundo bloco da seleção feita se resolviam da mesma maneira. O aluno pareceu demonstrar muita dificuldade em lidar com a integral definida, precisando recorrer ao livro e apresentando dificuldades em localizar o assunto no texto, já que não estava com o caderno. O trabalho com os exercícios foi interrompido, uma vez que o período previsto para a entrevista havia encerrado e o aluno tinha outros compromissos. A atividade foi retomada na entrevista seguinte, quando Fabrício pegou novamente o livro, na busca de um exemplo de resolução de integral definida. Apresentou a mesma solução, decorrente do uso do Teorema Fundamental do Cálculo para resolver os exercícios 2 e 3, obtendo o mesmo resultado, zero, para os dois.

A pesquisadora indagou se o aluno tinha o hábito de verificar os

exercícios quanto à correção, ao que ele respondeu que não. Posteriormente, ela perguntou a Fabrício se costumava usar a representação gráfica para entender melhor o que estava fazendo, constatando não ser essa uma estratégia adotada pelo aluno. Além de não conseguir esboçar os gráficos, mesmo depois que a pesquisadora apresentou-os ao estudante, Fabrício afirmou que aquilo em nada o ajudava a refletir sobre o exercício. Foi necessário todo um diálogo entrevistador/entrevistado, para que o aluno conseguisse descobrir que, na

solução apresentada para $\int_{-1}^1 x^{-2} dx$, ele havia empregado indevidamente o

Teorema Fundamental do Cálculo, mas o aluno não fazia idéia de como proceder a partir dessa impossibilidade.

Fabrício demonstrou conhecer pouco sobre técnicas de integração, fato que o impedia de especular sobre outras possibilidades ou de utilizar escolhas adequadas na solução dos exercícios, uma vez que não havia elaborado sínteses teóricas sobre o assunto. Nos trabalhos desenvolvidos, evidenciou-se um movimento iniciado sempre a partir da prática, buscando um exemplo similar, lançando mão de estratégias de comparação de padrões, o que levou a classificá-lo como apresentando um estilo *prático* → *teórico*. É importante destacar que, embora o aluno tenha declarado se preocupar com a teoria, o deslocamento que faz da prática para a teoria é pequeno e lento, assim, seu estilo é orientado fortemente pela prática. Para Fabrício, Matemática se aprende fazendo exercícios: concepção de aprendizagem de Matemática que ele havia explicitado desde o início dos trabalhos. Como seu tempo de estudo é pouco, a estratégia de priorizar a resolução de exercícios, quase sem interlocuções teóricas parece não favorecer sua aprendizagem de Cálculo, comprometendo a caracterização de seu estilo de aprendizagem.

Aluísio: estudos teóricos apoiados sempre na resolução de exercícios.

O aluno Aluísio foi classificado como apresentando um estilo de aprendizagem *teórico* → *prático*. As passagens aqui descritas visam ilustrar a razão da classificação feita, mas são apenas uma ilustração, considerando que a categorização decorreu de um processo longo de análises e reanálises das entrevistas conduzidas, mediante a indexação de cada passagem, segundo os sinalizadores definidos.

Aluísio declarou que seu estudo de Cálculo consistia em ler o assunto antes da explicação do professor e marcar as dúvidas, fato que chamou a atenção da entrevistadora, que pediu ao aluno que lhe explicasse melhor sobre essa prática. O aluno colocou que achava essa maneira fundamental, mesmo que ao ler a teoria previamente não entendesse tudo, pois já teria uma idéia sobre o assunto que seria tratado e que procurava fazer sempre isso, sendo impedido, às vezes, pelo acúmulo de trabalhos das várias disciplinas.

Embora Aluísio considerasse fazer exercícios uma estratégia importante tanto para estudar cálculo como para aprender matemática, ele parecia buscar sempre um apoio teórico, no livro ou nas anotações de aula, como pode-se observar quando ele afirma que lê primeiro tudo, depois lê novamente e, então, escreve os pontos fundamentais de cada tópico; após isso, ele verifica suas anotações no caderno, completando suas anotações e posteriormente, fazendo os exercícios.

As representações do aluno sobre o seu método de estudo puderam ser contrastadas com suas ações ao lidar com os exercícios propostos. Na atividade de seleção e ordenação dos exercícios para resolução, Aluísio, adotou a estratégia de buscar similaridades, estabelecendo quatro blocos: o primeiro constituído pelos exercícios 2, 3, 7; o segundo pelos exercícios 4 e 5; dois outros blocos contendo um deles o exercício 1, o outro o número 6 (QUADRO1). O aluno resolveu rapidamente os dois primeiros exercícios do bloco 1, usando o que chama de fórmula direta da integral. Embora alegasse não usar a estratégia de esboçar os gráficos para visualizar as questões, a pedido da entrevistadora, fez o esboço dos gráficos. Ao refazer as contas do

exercício 2, $\int_{-1}^1 x^3 dx$ descobriu um equívoco cometido, corrigindo o resultado.

A pesquisadora indagou se uma integral sempre representava uma área. A princípio parece que essa era a idéia do aluno, mas o valor zero encontrado, pareceu desestabilizar essa síntese anteriormente realizada.

O diálogo desenvolvido a partir do gráfico do exercício $\int_{-1}^1 x^{-2} dx$,

levou o aluno a perceber que o padrão de similaridade dos dois exercícios, anteriormente pensado, na realidade não ocorria. A pesquisadora indagou ao aluno qual a teoria que dava sustentabilidade à solução apresentada para o exercício 2 e ele identificou como sendo o Teorema Fundamental do Cálculo, localizando o enunciado do teorema no caderno. Alúcio percebeu que o mesmo teorema não poderia ser empregado na solução do exercício 3, reconhecendo que a descontinuidade no ponto zero, exigiria o uso de limite, “eu aplicaria o limite de h tendendo a zero,” querendo se referir ao método usado na resolução de integrais impróprias.

Alúcio explicou haver colocado o exercício $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$ no mesmo

bloco 1 “porque $1/n!$ (...) como uma constante que eu poderia passar para fora da integral”, ressaltando que poderia ser uma idéia totalmente errada de sua parte. Mas prosseguiu o diálogo com a entrevistadora explicando que a presença do somatório o havia levado a relacionar o exercício com o estudo de ‘séries’ e que estava buscando o termo geral da série.

Aparentemente, o aluno definiu-se por um estilo com uma orientação teórica, embora sempre se reportando ao exercício. Mesmo se algumas vezes o aluno partisse da prática, durante o processo interativo de construção do conhecimento, saltava em direção à teoria e, em grande parte das atividades, executava o movimento em sentido contrário, como resultado de uma série de estratégias de estudo e aprendizagem, de especular, comparar padrões, buscar sínteses, entre outras, motivo pelo qual foi classificado como apresentando um estilo *teórico* → *prático*.

Patrícia e seu estilo *teórico* → *prático* de aprender Cálculo. Patrícia é uma aluna cuja opção pelo curso de Engenharia parece ter sido feita de modo consciente:

Eu sou do interior, de uma cidade pequena. Meu segundo grau eu fiz numa escola particular. Fui muito bem, sempre tive muita facilidade com Matemática, gostei muito, inclusive meu pai é professor de matemática. Na verdade, não era Engenharia que eu queria. Eu saí do interior, vim para cá

com o intuito de fazer Medicina. Mas aí eu mudei e vi que não era aquilo que eu queria, mudei a tempo. Estou gostando muito do curso, está além das minhas expectativas. (PATRÍCIA)

De modo geral, o professor de Cálculo, premido por questões de tempo que exigem compatibilizar uma carga horária pequena da disciplina e um conteúdo programático extenso e amparado pela pouca motivação dos alunos, limita-se a ensinar procedimentos, receitas para resolver determinadas questões e escuda-se na proposta curricular e no desinteresse dos estudantes para justificar que não se façam investimentos com vistas a uma formação matemática mais conceitual.

Entretanto, apesar dessa diretriz de um ensino mais procedimental, alguns alunos parecem desenvolver um método de estudo que privilegia a teoria e a busca de relações entre os vários conceitos matemáticos.

O estudo teórico faz parte, por exemplo, do processo de estudo e aprendizagem de Patrícia, conforme nos mostra a fala da aluna:

Eu leio um pouco a teoria, procuro uns livros que a teoria seja melhor, mais fácil de entender, depois vou nos exercícios e vou resolvendo.

Eu leio um pouco da teoria. Com certeza eu me preocupo mais com a prática. Mas eu procuro entender a teoria sim, senão eu não sei como conseguir. (PATRÍCIA)

As estratégias preferenciais de Patrícia puderam ser identificadas no trabalho realizado durante as entrevistas. De modo geral, Patrícia pareceu demonstrar segurança ao lidar com a tarefa de seleção, ordenação e resolução de exercícios.

Uma solução apressada conduziu a aluna a empregar indevidamente

o Teorema Fundamental do Cálculo na determinação da integral $\int_{-1}^1 x^{-2} dx$.

Os demais exercícios não ofereceram problemas e Patrícia demonstrou firmeza quanto ao método de trabalho e prontidão para realizar sínteses teóricas.

Instigada pela pesquisadora, ela foi capaz de lançar mão da representação gráfica, reconhecendo que o resultado obtido no cálculo da

$\int_{-1}^1 x^3 dx$, poderia ter sido antecipado, sem necessidade de cálculos,

considerando-se o fato da função integrada ser ímpar e o intervalo de integração, simétrico.

A pesquisadora indagava sempre mais sobre o processo de trabalho da aluna, que evidenciou lidar com facilidade com os exercícios que demandavam o uso da técnica de substituição simples:

Nem eu sei te explicar, eu sou muito de pegar o exercício e ficar tentando mentalmente, ver como é que eu vou resolvê-lo, eu fico tentando, antes de colocá-lo no papel, tentar: Mas por onde eu vou sair? Aí é que vai dar certo, trabalhar com a mente mesmo. Tipo, assim, o que eu vou precisar, o que eu preciso para poder fazer esse exercício, o que ele está me pedindo. É como se você primeiro ficasse conversando com você mesmo [...] Se eu vou fazer alguma coisa, eu leio uma vez para eu ter a idéia mais ou menos do que se trata e depois eu leio de novo, entendeu, para eu poder pensar. Não é só ler e ficar naquilo não, eu gosto de pensar porque eu estou resolvendo isso. (PATRÍCIA)

Patrícia dialoga com o exercício, indagando-se acerca do que o exercício pede, do que necessitará para resolvê-lo, e antes de tudo lê mais de uma vez cada tarefa proposta. Nunca acha que já sabe tudo e, para ela, resolver exercícios é uma forma de se auto-avaliar:

Quanto mais eu estudo, mais eu vejo que eu não sei nada e que está faltando alguma coisa. Mas quando eu sou capaz de pegar um livro para resolver os exercícios, é ter a facilidade, resolver com facilidade porque quem sou eu para saber tudo [...] pegar um livro, independente de qual seja e dar conta de olhar um exercício e falar: Ah, esse é simples, se eu fizer por esse e por esse jeito, ele vai dar certo. (PATRÍCIA)

Patrícia sempre atribuiu à Matemática um papel importante, talvez

pelo gosto que sente pela matéria. Suas expectativas em relação ao curso de Cálculo foram explicitadas no começo das entrevistas: ampliar os conhecimentos, ser um curso que não exija apenas usar fórmulas, fazer mais exercícios aplicados, ser mais cobrada nos estudos, entre outros.

Na última entrevista, conduzida já ao término do semestre, a pesquisadora indagou se as expectativas que haviam sido enunciadas no começo do semestre teriam se concretizado, o que foi confirmado por Patrícia:

Esse semestre realmente foi mais puxado, nós começamos a ter que estudar mais, pegar mais o livro, praticar mais, e realmente foi um pouco mais difícil. Mas a prática em si, eu ainda não vi não, no que eu vou aplicar isso. Eu sei que eu vou aplicar o que eu aprendi, mas em quê, eu não sei. Que vai ser usado, eu sei, futuramente eu vou precisar lembrar, vou ter que rever o que eu vi, mas não vejo, hoje, uma aplicação não. Eu acho que os professores deveriam procurar mostrar mais. (PATRÍCIA)

A pesquisadora indagou acerca dessa postura, de buscar resultados mais imediatos e aplicados, de opção por uma matemática mais instrumental, objetivando apenas os estudos de Engenharia, o que foi explicado por Patrícia:

Eu sou muito curiosa e até acredito que seja por isso mesmo, pela minha curiosidade, eu gostaria de saber o “porquê e em que, eu vou usar isso”, entendeu? E eu tenho esse defeito eu gosto muito de saber “para que e por que eu vou usar isso”. Eu gosto de aprender e eu quero aprender, mesmo se eu não for usar eu quero aprender, porque hoje está sendo cobrado e está me interessando [...] Eu gostaria de saber futuramente o que eu vou usar, como que eu vou aplicar isso. (PATRÍCIA)

A aluna é automotivada para os estudos. Trabalha e estuda, além de outras responsabilidades familiares. Estudar sozinha, ler a teoria nos livros, dialogar com o exercício, buscar soluções próprias. Todas essas características de estudo de Patrícia destacam sua autonomia. Diante das situações propostas, Patrícia justificou suas escolhas sempre a partir de um diálogo teórico, indagando acerca dos dados disponíveis, dos suportes teóricos para o caminho de solução pensado, da coerência entre o resultado obtido e a teoria posta,

num contínuo automonitoramento de seu processo de aprendizagem.

Novas abordagens dos exercícios na aula de Cálculo

Fazendo uma retrospectiva dos trabalhos desenvolvidos ao longo das entrevistas, Patrícia comentou que nunca havia parado para pensar como estudava, passando a se questionar sobre o seu método de estudo a partir das entrevistas.

De modo geral, refletimos pouco acerca de nossas estratégias de aprendizagem de Matemática e nossos estilos de aprender matemática. Esse é um tema que parece ainda bastante ausente de nossos debates na Educação Matemática e da nossa sala de aula.

Ao desvelarem o seu modo de estudar e aprender Cálculo, os alunos Fabrício, Aluísio e Patrícia nos levam a refletir sobre a nossa própria prática, de modo particular sobre os exercícios de Cálculo, que perpassam a nossa sala de aula. Quais as estratégias de aprendizagem cujo desenvolvimento temos favorecido através das tarefas propostas aos estudantes? Qual o valor que atribuímos à resolução de exercícios para a aprendizagem de Matemática? Como temos empregado os exercícios, enquanto instrumentos de aprendizagem de Matemática?

Fabrício, Aluísio e Patrícia atribuem à resolução de exercícios um papel relevante para a aprendizagem de Matemática. A tensão entre teoria e prática na aprendizagem do Cálculo se faz presente na fala dos três alunos. A pesquisa desenvolvida aponta para a importância de repensar a estratégia de ensino e aprendizagem de Cálculo através da resolução de exercícios a partir de novas abordagens, como instrumento: de desafio, propulsor de uma atitude de especulação e indagação; de diálogo com a teoria; de sistematização teórica e de avaliação da aprendizagem. Todas essas possibilidades caracterizam, por exemplo, a forma com que Patrícia personaliza a estratégia de aprendizagem através da resolução de exercícios, num estilo de aprendizagem de Matemática.

Um exercício proposto pode alavancar toda uma reflexão teórica, seja através da especulação de possibilidades teóricas de solução ou de diferentes soluções para um mesmo problema, seja por induzir a realização

de sínteses teóricas. As famosas listas de exercícios de matemática podem assumir uma nova conotação, desde que cada tarefa passe a ser cuidadosamente selecionada ou elaborada, para que não exija apenas uma repetição de procedimentos.

A aula de exercícios pode, assim, transformar-se em um debate acerca de idéias e de processos matemáticos. O exercício colocado no quadro torna-se instrumento de questionamentos: o professor indaga; os próprios alunos questionam a partir das dúvidas; o professor suscita a pesquisa, a possibilidade de novas soluções; os erros tornam-se elementos essenciais ao processo de aprender. Exercícios igualmente resolvidos podem despertar questões teóricas, na busca de padrões de solução. Exercícios que não seguem padrões levam a novas pesquisas. Teoria e prática se fundem num vaivém de um novo modo de fazer matemática na sala de aula.

REFERÊNCIAS

CRAWFORD, K. et al. Qualitatively different experiences of learning mathematics at university. **Learning and Instruction**, Oxford, v. 8, n. 5, p. 455-468, 1998.

ERICKSON, K. A.; SIMON, H. A. **Protocol analysis**: verbal reports as data. rev. ed. Cambridge: MIT Press, 1993.

FROTA, M. C. R. **O pensar matemático no ensino superior**: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos. 2002. 287 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

FROTA, M. C. R. O papel do exercício no ensino/aprendizagem de Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. Blumenau: FURB, 2003. 1 CD-ROM. p.1-12.

MARTON, F.; BOOTH, S. **Learning and awareness**. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1997.

MARTON, F.; SÄLJÖ, R. On qualitative differences in learning: I – outcome and process. **British Journal of Educational Psychology**, Leicester, v. 46, p. 4-11, 1976.

NISBET, J.; SCHUCKSMITH, J. **Learning strategies**. New York: Routledge, 1991.

PINTO, M. M. F. **Students' understanding of real analysis**. 1998. 320 f. Thesis (Phylosophy Doctor) – Institute of Education, Warwick University. Disponível em: <http://www.tallfamily.co.uk/marciapinto/pdfs/00-preliminaries.pdf> Acesso em: 20 nov. 2006.

STERNBERG, R, J. **Thinking styles**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

TALL, D. O. From school to university: the transition from elementary to advanced mathematical thinking. In: AUSTRALASIAN BRIDGING CONFERENCE OF MATHEMATICS AT AUCKLAND UNIVERSITY, 1997, New Zeland.

VERMUNT, J. D. Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: a phenomenographic analysis. **Higher Education**, Amsterdam, v. 31, p. 25-50, 1996.

WESTERA, W. Competences in education: a confusion of tongues. **Journal of Curriculum Studies**, Basingstoke, v. 33, n. 1, p. 75-88, 2001.

ZHANG, L.; STERNBERG, R. J. A threefold model of intellectual styles. **Educational Psychology Review**, New York, v. 17, n. 1, p. 1-52, 2005. doi:10.1007/s10648-005-1635-4

Aprovado em junho de 2007
Submetido em outubro de 2006