

Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática

**Semiotic Registers and Cognitive Obstacles Related to Solving
Introductory Problems to Non-Euclidean Geometries Directed to the
Preparation of Mathematics Teachers**

Ana Maria M. R. Kaleff¹

Resumo

Este artigo trata de aspectos específicos de uma pesquisa sobre a aquisição de conceitos geométricos no âmbito da formação de professores de Matemática no momento da transição entre os conhecimentos euclidianos e os não-euclidianos. Tomando-se o conhecimento de Geometria Euclidiana do professor como objeto passível de investigação, buscou-se identificar categorias de obstáculos cognitivos, que comparecem no processo de resolução de problemas introdutórios aos conhecimentos não-euclidianos. Para imprimir um caráter qualitativo à pesquisa, realizaram-se entrevistas individuais com seis professores e dois licenciandos. A corroboração das categorias encontradas foi conduzida por meio de um questionário aplicado a 45 professores dos ensinos fundamental e médio. Partindo-se de uma análise cognitiva da conversão entre registros semióticos de representação, verificou-se a existência de 14 categorias de prováveis obstáculos cognitivos, os quais estão relacionados a 7 tipos de registros semióticos.

Palavras-chave: Registros Semióticos. Prováveis Obstáculos Cognitivos. Formação de Professores de Matemática.

¹ Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense - UFF. Endereço para Correspondência: Rua Mario Santos Braga s/n. Campus do Valonguinho. CEP: 24020-140 Niterói-RJ. email: anakaleff@vm.uff.br

Abstract

This investigation deals with selected aspects of an investigation regarding the acquisition of geometric concepts by in-service mathematics teachers at a very particular moment in their education or preparation: that of the transition between Euclidean and non-Euclidean geometric knowledge. Considering knowledge on Euclidean Geometry acquired by teachers as the subject to investigate, categories of mental representations and cognitive obstacles appearing in the process of resolution of introductory problems to non-Euclidean geometric concepts were researched. To cover the qualitative aspects, interviews with six in-service teachers and two undergraduates were conducted. Quantitative confirmation was pursued by means of a questionnaire administered to 45 in-service teachers. After a cognitive analysis of the conversion between semiotic registers, 14 categories of possible cognitive obstacles were identified as related to 7 semiotic registers of representation.

Key-words: Cognitive Obstacles. Semiotic Registers. Preparation of Mathematics Teachers.

Apresentação

Nas duas últimas décadas, têm sido criadas oportunidades para a inclusão, nos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o século XXI, de conteúdos advindos das diversas Geometrias, Euclidiana e não-Euclidianas. Estes conteúdos têm sido objeto de discussão entre membros de associações de profissionais da Matemática, matemáticos, professores e educadores matemáticos, em vários países (MAMMANA; VILLANI, 1998). Os resultados e as conseqüências destas interações têm sido apresentados em documentos emitidos por grupos internacionais de pesquisa sobre currículos para a Geometria Escolar, bem como em documentos governamentais norteadores da prática educacional do professor de Matemática (NCTM, 1989, BRASIL, 1998).

Este artigo relata alguns aspectos de uma pesquisa cujo ponto de partida foi a prática pedagógica da autora em cursos de formação de professores de Matemática, a qual apontava para dificuldades na apreensão de conceitos geométricos não-euclidianos que poderiam vir a influenciar o desempenho profissional do professor. Com esta investigação buscou-se

ampliar o entendimento relativo às formas pelas quais adultos se confrontam com os conhecimentos geométricos não-euclidianos, com o fim de se contribuir para que possam ser introduzidos na Escola.

A pesquisa aqui relatada envolveu um grupo de discentes de dois cursos de formação de professores de Matemática, ambos da UFF, sendo um deles um curso de licenciatura e o outro, de especialização, destinado a profissionais em exercício. Colocou-se sob investigação o comportamento dos participantes diante do processo de resolução de um problema de Matemática Discreta, designado doravante como *problema-objeto*, o qual também é geralmente adotado, em disciplinas de graduação, como atividade introdutória ao ensino das Geometrias não-Euclidianas.

Buscou-se desvelar os prováveis obstáculos cognitivos que pudessem influenciar o desempenho dos participantes frente aos desafios colocados tanto pela tarefa de resolução do problema-objeto, quanto pelo contexto em que esta tarefa se inseria: o dos conhecimentos não-euclidianos. Para tanto, buscou-se capturar os sistemas de registros semióticos utilizados no processo de resolução do problema e entender de que forma o sujeito percebia os objetos matemáticos envolvidos no procedimento de resolução.

Metodologia da pesquisa

As características qualitativas e as linhas gerais da metodologia da pesquisa aqui adotada e que influenciaram a estruturação geral da escolha dos instrumentos para obtenção de dados e de sua análise, foram elaboradas a partir das considerações sobre pesquisa qualitativa estabelecidas por Bogdan e Biklen (1991). Os instrumentos se constituíram de entrevistas semi-estruturadas e de um questionário estruturado, elaborado a partir dos resultados preliminares advindos das mesmas.

Com fulcro no problema-objeto, a ser apresentado mais adiante, foram realizadas oito entrevistas individuais. Em seguida, um questionário foi aplicado a 45 professores de Matemática. Dentre os participantes, 51 apresentavam experiência profissional média de 10 anos e haviam cursado ao menos uma disciplina de curso de especialização, envolvendo conteúdos de Lógica Formal

e de Teoria dos Conjuntos. Dois dos restantes eram licenciandos aprovados em uma disciplina envolvendo sistemas axiomáticos não-euclidianos.

Tanto na estruturação das entrevistas, quanto na elaboração do questionário, foram adotados os conceitos de *representações semióticas dos objetos matemáticos* e de *compreensão integrativa de um objeto matemático, relacionada a registros semióticos de representação*, conforme entendidos por Raymond Duval (1995, 2003) e apresentados logo a seguir.

Nos pressupostos teóricos para a estruturação das entrevistas, bem como na análise das mesmas, foram ainda levados em conta os conceitos de *obstáculo cognitivo* (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001) e de *pergunta geradora* (VOSNIADOU, 1994). Os obstáculos cognitivos foram considerados como blocos cognitivos (constructos cognitivos) que impedem ou perturbam o estabelecimento de relações de articulação entre as representações mentais do sujeito no processo de compreensão de um conceito ou no processo de realização de uma atividade. Por sua vez, perguntas geradoras foram tratadas como instrumentos que permitem ao entrevistado uma desconstrução dos obstáculos cognitivos, ou seja, das dificuldades apresentadas pelo sujeito na configuração das representações mentais relativas aos conceitos matemáticos utilizados no âmbito da resolução do problema.

Em cada entrevista, acompanhou-se o processo de resolução desenvolvido pelo sujeito. Para fazer frente às situações de bloqueio no processo de resolução, as quais exigissem mudanças ou rupturas de comportamento do entrevistado frente ao enunciado, foi estabelecido um conjunto inicial de perguntas, denominadas de geradoras, advindas da prática pedagógica da pesquisadora com casos de apresentação e resolução do problema-objeto. Estas perguntas geradoras foram testadas em uma entrevista piloto, a qual também serviu para verificar a adequação do problema-objeto como instrumento de coleta de dados e da metodologia de interação com os entrevistados. O conjunto inicial de perguntas geradoras foi sendo ampliado na medida em que as entrevistas foram acontecendo.

Estipulou-se em 90 minutos a duração máxima de cada entrevista e estabeleceu-se que, se o entrevistado resolvesse o problema em tempo inferior, a entrevistadora, por meio de perguntas geradoras, buscaria romper com os

padrões de registros semióticos utilizados na resolução, visando à verificação da preferência por, ou da predominância de padrões de registros.

Por sua vez, a análise das entrevistas foi orientada segundo a direção apontada pelas características micro-genéticas de cada instante da mesma. Este tipo de análise é inspirada em duas linhas teóricas, aparentemente disjuntas, mas que se complementam. Por um lado, pela *análise cognitiva de registros semióticos de uma atividade matemática*, baseada na conversão entre dois registros semióticos representantes de um mesmo objeto matemático, conforme proposta por Duval (2003) e apresentada mais adiante. Por outro, pela *análise micro-genética interpretativa* de uma entrevista, a qual “baseia-se fortemente na apresentação de narrativas e explicações detalhadas dos fenômenos investigados, com pouco ou nenhum uso de esquemas tradicionais de caracterização de estratégias” (MEIRA, 1994, p. 61). Tal abordagem é direcionada pelo princípio segundo o qual o instrumento de análise deve inspecionar as ações em seus pormenores, sem, no entanto, negligenciar o significado da atividade como um todo.

Cabe ainda ressaltar que foram utilizadas duas modalidades de instrumentos de registro para os dados de cada entrevista, os quais possuem dimensões bem diferenciadas, no que se refere ao potencial de uma análise de características micro-genéticas. A primeira constitui-se do registro *videográfico*, para o qual se optou pelo uso de uma câmara fixa na busca da captura fiel das seqüências de ações, da expressão verbal e do gestual do entrevistado, servindo também à documentação de todos os registros gráficos gerados.

A segunda modalidade de instrumento de registro de dados, criada no transcorrer do presente estudo, surgiu da necessidade de se dar aos registros gráficos gerados pelo entrevistado o mesmo potencial seqüencial temporal de uma análise micro-genética da transcrição de um diálogo. Para o seu desenvolvimento a pesquisadora elaborou, no decorrer de cada entrevista, um conjunto de anotações gráficas concomitantes às realizadas pelo entrevistado. A partir destas anotações e dos registros videográficos foi criado, para cada entrevista, o instrumento de análise denominado de *Seqüência Histórica de Construção dos Registros Gráficos* (SHRG), conforme

apresentado em Kaleff (2004, 2006). Este instrumento relata a evolução temporal de cada registro desenvolvido pelo sujeito da entrevista na forma de uma *história em quadros*. Cada quadro correspondendo a um instantâneo selecionado do registro em desenvolvimento.

O questionário, por sua vez, era constituído por cinco questões escritas e individuais, e ainda por um questionário complementar foi respondido em duas sessões, com duração total de 4 horas, sendo que cada uma das questões foi apresentada aos pesquisados separadamente das demais, evitando-se a leitura concomitante dos enunciados e das resoluções.

Registros de representação, conversão de registros semióticos e análise cognitiva

Inicialmente, cabe considerar que, devido à grande diversidade das representações semióticas dos objetos matemáticos, geralmente apresentados como símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos ou desenhos, Duval (1995) adota a noção de *registro semiótico de um objeto matemático* para se referir a uma modalidade qualquer de uma dessas representações. Ele adota ainda a noção de *sistema semiótico de representação*, quando se refere a uma especial modalidade de registros semióticos como um conjunto de registros de representação. É importante, neste ponto, enfatizar que Duval entende a natureza e a representação dos objetos matemáticos da mesma forma que muitos filósofos e matemáticos, isto é, a partir da perspectiva que considera a Matemática como constituída por objetos abstratos. Ou seja, objetos não diretamente acessíveis à percepção sensorial e que demandam, para sua apreensão, o uso de representações perceptuais concretas constituídas, em geral, por sinais gráficos. Segundo a referida perspectiva, para se expressar conceitos e relações da Matemática são necessárias representações semióticas, as quais, para Duval, são coadjuvantes na compreensão destes conceitos, na forma daquilo que ele denomina de *compreensão integrativa*. Esta última, como se verá a seguir, está relacionada à articulação e à conversão entre registros grafados, a qual permite o desvelamento dos conteúdos do objeto por meio daqueles inerentes a cada registro, pois “toda representação é

cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e as representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual” (DUVAL, 1995, p. 61, tradução livre nossa). Portanto, para a captura e compreensão do significado de um objeto matemático faz-se necessária uma coordenação mental envolvendo diversos representantes advindos de diferentes sistemas semióticos, pois frente à multiplicidade de formas de representação matemática, a apreensão de sua significação pode se tornar muito complexa. Esta complexidade se expressa na prática educacional, quando se enfrenta as situações do ensino de conceitos matemáticos que não possuem um significado *a priori*, como acontece no caso das Geometrias advindas dos sistemas formais, cujos objetos só possuem o significado instituído pelos matemáticos, por meio de convenções. Antes de se considerar como Duval elenca as funções cognitivas e as relaciona às conversões de registros semióticos, cabe registrar como ele entende as *representações mentais*:

são as que permitem observar o objeto na ausência de qualquer significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às ‘imagens mentais’ enquanto entidades psicológicas que têm relação com a percepção. Mas as representações mentais cobrem um domínio mais amplo do que aquele das imagens. É necessário incorporar não só os conceitos, as noções, as ‘idéias’, senão também as crenças e as fantasias, isto é, todas as projeções mais difusas e mais globais que refletem os conhecimentos e os valores que um indivíduo compartilha com o seu meio, com um grupo particular ou com seus próprios desejos (DUVAL, 1995, p. 28, tradução livre nossa).

Ainda segundo Duval (1995), existem três tipos de atividades cognitivas relacionadas às representações mentais e aos registros semióticos. A primeira é a da *formação de representações em um registro semiótico*, ou seja, a atividade cognitiva mobilizada pelo sujeito para expressar uma representação mental ou para evocar um objeto real. Esta implica em uma seleção a partir de um conjunto de caracteres, seguida da elaboração daquilo que será representado. Os outros dois tipos de atividades cognitivas estão relacionados às transformações de representações semióticas: *tratamento e conversão*.

No tratamento, o sujeito expressa uma transformação mental exteriormente, no âmbito de um mesmo registro de representação ou no de um sistema de registros. Este é o caso, por exemplo, dos cálculos em um sistema numérico, ou das transformações do desenho de uma figura geométrica em outro correlato. Por sua vez, a *conversão* é um processo mental no qual uma dada representação de um objeto, em um registro (ou sistema) semiótico, é convertida em uma representação desse mesmo objeto em outro registro (ou sistema). Esse é o caso da conversão de uma fórmula da geometria analítica no desenho da figura geométrica correspondente.

Cabem ainda algumas observações sobre como Duval (2003) entende uma *análise cognitiva de registros semióticos de uma atividade matemática*. Esta análise é baseada na conversão entre dois registros, discursivos ou não, representantes de um mesmo objeto matemático e se fundamenta na exploração das variações de *congruência semântica*. Nestes casos, “duas situações podem ocorrer. Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão esta próxima de uma situação de simples codificação - diz-se então que há congruência -, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência” (DUVAL, 2003, p. 19).

O problema-objeto da pesquisa e a estruturação do questionário

O problema-objeto adotado nas entrevistas e que subjaz ao questionário é apresentado no quadro a seguir.

Considere um jogo cujas regras são estabelecidas por um sistema de proposições afirmativas relativamente a um conjunto qualquer de elementos, com as características descritas a seguir.

S é um conjunto de elementos quaisquer chamados “pontos”. Convencionou-se também chamar de “retas” a subconjuntos contidos em S, mas que não coincidem com ele, e que contenham exatamente três pontos. Considere que neste jogo, existe uma relação entre os pontos e as retas de S satisfazendo às seguintes afirmações:

A₁: Existe pelo menos um ponto em S.

A_2 : Por cada ponto de S passam exatamente duas retas.

A_3 : Por dois pontos distintos quaisquer de S passa, no máximo, uma reta.

Saiba que, em S , “pontos” diferentes e “retas” diferentes são sempre denotados por letras diferentes, sendo os “pontos” grafados por letras maiúsculas e as “retas” por minúsculas.

QUESTÃO-PROBLEMA: Qual é o número mínimo de pontos de S , que admite uma solução para o jogo?

QUADRO 1. O Problema-Objeto

O enunciado trata de uma abordagem semelhante à que ocorre na introdução dos sistemas axiomáticos não-euclidianos, geralmente apresentados como modelos geométricos, e não como um problema. Observe-se que nele se apresentam três regras explícitas, A_1 , A_2 e A_3 e três convenções implícitas.

Note-se ainda que o enunciado refere-se a *elementos quaisquer* chamados *pontos* e a *subconjuntos de três pontos*, denominados *retas*. As regras e convenções estabelecem uma *relação de pertinência* entre os elementos e os subconjuntos de S , a qual é explicitada pelo verbo *passar* e não estabelece *a priori* nenhuma interpretação ao seu significado, relacionada à métrica, ao comprimento e à proximidade. As implicações possíveis são as estabelecidas pela relação de pertinência entre elementos e conjuntos. Como decorrência, tomando-se as expressões *ponto de S* e *reta de S* como unidades semânticas constitutivas das proposições do enunciado, tem-se que tais expressões podem ser associadas a unidades elementares de significado, o qual, no entanto, não é pré-determinado ao enunciado e nem deve ser fixado.

No Quadro 2, encontra-se uma possível resolução do problema-objeto conduzida segundo dois tipos de registros apropriados à representação de relações da Teoria de Conjuntos.

A partir das afirmações que caracterizam o problema, tem-se que o conjunto S não pode ser vazio, pois de A_1 decorre que

a) em S existe ao menos um elemento. Designe-se este elemento com a letra maiúscula A .

Tomando-se como premissa a proposição A_2 , pode-se afirmar que deverão existir ao menos dois subconjuntos de S aos quais o elemento A pertença. Estes, devido à consideração de que cada reta (e , portanto subconjunto) de S possui três pontos (elementos), para completar, deverão ter mais dois elementos cada, sendo o elemento A comum a ambos.

b) Sejam B e C as designações dos elementos adicionais de um destes subconjuntos, o qual passará a ser formado por A , B e C e designado por r . Sejam ainda D e E os elementos adicionais do outro subconjunto, o qual passará a ser formado por A , D e E e designado por s .

Portanto, observa-se que S deverá possuir ao menos 5 elementos, os quais, no entanto, não configuram a solução do problema, pois cada um dos elementos B , C , D e E pertence a apenas um subconjunto, deixando, portanto, de satisfazer à afirmação A_2 .

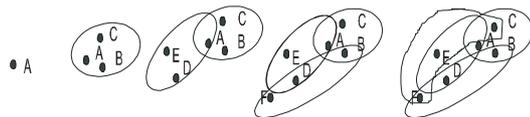
A busca da solução deverá ser empreendida por meio da adoção da hipótese da existência de uma solução contendo elementos e subconjuntos adicionais para S , para os quais as regras e as convenções deverão ser verificadas. É o que se apresenta a seguir.

c) Dado que se busca o número mínimo de elementos de S , suponha-se que exista apenas mais um elemento (o sexto) em S . Seja F a designação escolhida para este elemento.

d) Não havendo preferência em relação aos pares de elementos mencionados, considere-se um subconjunto adicional, t , formado por B , D , F . Notando-se ainda que apenas três elementos de S (C , E e F) ainda não foram incluídos em um segundo subconjunto, pode-se criar um adicional u que os contenha. Neste ponto é necessário verificar se a afirmação A_3 foi satisfeita. Observe-se que, qualquer par de elementos a ser considerado, pertencerá a não mais do que um subconjunto de S . Tem-se, desta forma, que os seis elementos A , B , C , D , E e F , acomodados nos quatro subconjuntos r , s , t e u , são uma solução para o problema. Além disso, utiliza o menor número de elementos, para que S seja um jogo com as características consideradas. Como decorrência, o número mínimo de elementos de S , conforme solicitado, é seis.

Apresenta-se, a seguir, a evolução desse procedimento de resolução grafado em registros apropriados à representação de conjuntos: o primeiro expresso na linguagem discursiva especialmente criada por Georg Cantor para a Teoria dos Conjuntos, e o segundo, na linguagem gráfica não-discursiva dos Diagramas de Venn.

- | | | | | |
|--------|----------------------|---|--|---|
| a) A | b) $r = \{A, B, C\}$ | c) $r = \{A, B, C\}$
$s = \{A, D, E\}$ | d) $r = \{A, B, C\}$
$s = \{A, D, E\}$
$t = \{B, D, F\}$ | e) $r = \{A, B, C\}$
$s = \{A, D, E\}$
$t = \{B, D, F\}$
$u = \{C, E, F\}$ |
|--------|----------------------|---|--|---|



QUADRO 2. Um’ a Resolução do Problema-Objeto

Por sua vez, o questionário constituiu-se de cinco questões, das quais duas compõem uma adequação do enunciado do problema-objeto a uma situação limitada de um questionário, sem interferência do entrevistador. Estas duas questões encontram-se no Quadro 3, indicadas por Questões A e B.

QUESTÃO A

Considere um *jogo matemático* relativamente a um conjunto S de elementos quaisquer, qualificados segundo as seguintes convenções:

C_1 : Os elementos de S são denominados “pontos”.

C_2 : Alguns subconjuntos de S formados por exatamente três “pontos” são denominados “retas”.

O jogo consiste no estabelecimento do(s) subconjunto(s) de S que obedecem às seguintes regras:

Q_1 : O conjunto S contém quatro retas distintas.

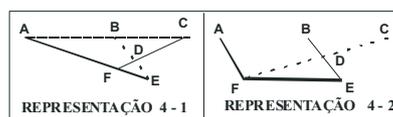
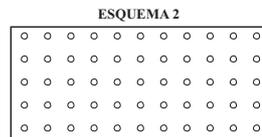
Q_2 : Para quaisquer duas retas distintas de S, existe, no mínimo, um ponto comum que pertence a ambas.

Q_3 : Para quaisquer duas retas distintas de S, existe, no máximo, um ponto comum que pertence a ambas.

Q_4 : Qualquer ponto de S pertence, no mínimo, a duas retas distintas.

Q_5 : Qualquer ponto de S pertence, no máximo, a duas retas distintas.

Utilizando a rede pontilhada quadriculada desenhada no Esquema 2, ou os meios que lhe forem mais adequados para representar os pontos e as retas (tais como letras, notação de conjuntos, símbolos gráficos etc.), responda e justifique: Qual é o número mínimo de pontos de S, que admite uma solução para o jogo? Mostre uma representação da solução que utilize o número mínimo de pontos e desenhe-a no Esquema 2.



QUESTÃO B

Considere o mesmo jogo matemático da questão anterior. Isto é, um *jogo matemático* relativamente a um conjunto S de elementos quaisquer, qualificados segundo as convenções C_1 e C_2 , e as regras Q_1 a Q_5 .

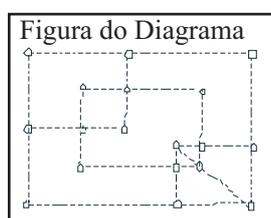
Nos desenhos das Representações 4-1 e 4-2, considere que as letras maiúsculas representam pontos e os diferentes padrões de traço, possíveis retas de S. Você acha que cada um desses desenhos pode ser utilizado para representar uma solução para o jogo, quando traçada sobre uma folha de papel sem qualquer marcação? Em caso afirmativo, indique se ambos os desenhos correspondem a uma representação correta para a solução do jogo. Justifique sua resposta, identificando as retas consideradas.

QUADRO 3. Duas Questões do Questionário

A estas questões foi acrescentado um questionário complementar visando a se obter referências sobre o conhecimento dos participantes relativamente às Geometrias.

Sobre as perguntas geradoras

A guisa de ilustração, cabem ainda algumas observações sobre as perguntas geradoras colocadas durante as entrevistas. Várias dessas perguntas visavam a remeter o entrevistado ao enunciado do problema, em situações nas quais ele aparentemente se desviava das suas afirmativas, ou não conseguia registrar o seu pensamento em um registro semiótico adequado a ele ou à questão-problema. Ou seja, várias das perguntas buscavam levar o sujeito a reconsiderar o significado e a veracidade das suas observações frente às convenções, às regras e à questão-problema: “*Pode se ter apenas um, dois, três, quatro, ou mais pontos, isto é, um número mínimo de pontos?*”; “*Os pontos do seu desenho pertencem ao conjunto considerado de elementos?*”; “*No jogo, a afirmação ‘quaisquer que sejam dois pontos distintos deste sistema existe uma única reta passando por eles’ pode ser verdadeira?*”. Com a pergunta geradora “*Como você está considerando o conjunto de regras e convenções, uma a uma, ou todas juntas?*”, buscou-se levar o sujeito a rever, em sua globalidade, a forma de abordar o conjunto de afirmações do enunciado. Por outro lado, com outras perguntas buscava-se avaliar se o sujeito reconhecia as convenções de desenho implícitas em um registro específico grafado por ele, como com a seguinte: “*Será que existe uma outra maneira de se representar a forma da reta desenhada?*”.



Uma pergunta geradora especial foi utilizada, nos casos em que se buscou ajudar o sujeito a reconsiderar um registro semiótico discursivo criado por ele e a convertê-lo para um outro tipo de linguagem gráfica não-discursiva: “*Considerando que, no desenho apresentado como Figura do Diagrama, as linhas pontilhadas entre os pontos possam indicar como se eles pertencessem a uma mesma reta, então, este diagrama poderia representar um esboço*

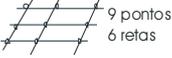
gráfico de um exemplo de S , no qual este teria 18 pontos? Caso isto não aconteça, reconstrua o desenho para que o seja. Como você fez isso?"

Cabe lembrar que as Questões A e B do questionário foram criadas com base nas perguntas geradoras advindas das entrevistas. Para tanto, na redação destas questões, uma das providências tomadas foi a de se fixar uma quantidade finita de *retas de S* , ou seja, 4 retas, a serem consideradas pelo pesquisado, com vistas a minimizar, durante a resolução, um possível impacto causado por dificuldades relacionadas com o surgimento de um número infinito de retas.

Exemplificando: uma resposta e o estabelecimento de um provável obstáculo cognitivo

Neste estudo, comungando com Duval, partiu-se da hipótese de que o sujeito, ao passar de um registro semiótico, no qual o enunciado do problema-objeto se apresenta, para outro, deixa perceber, no registro de chegada, de que maneira entende o conteúdo dos objetos matemáticos apresentados no enunciado, isto é, as unidades elementares de significado relacionadas nas suas afirmações (DUVAL, 2003, p. 19). Sob esta perspectiva, visando à observação das variações cognitivas relativamente aos objetos matemáticos considerados pelo entrevistado no procedimento de resolução do problema, foram realizadas três verificações. Inicialmente, verificou-se a existência de uma correspondência semântica entre as expressões *ponto de S* e *reta de S* , relativamente a cada par de diferentes registros semióticos considerados pelo entrevistado. Em seguida, buscou-se verificar se as mencionadas expressões apresentavam as mesmas possibilidades de apreensão visual em cada um dos pares de registros e, finalmente, verificou-se se a correspondência de significado, para cada expressão, era única. O Quadro 4 ilustra um esquema da análise desse procedimento de conversão de registros, no caso de uma entrevistada, em relação à Figura 1 realizada por ela. Este quadro e o respectivo trecho da entrevista permitem se ter uma visão de como, no presente estudo, foram constatadas as três categorias de eventos que influenciaram o comportamento do sujeito na resolução do problema-objeto e como elas se relacionam.

No Quadro 4, observando-se a Figura 1, pode-se afirmar que tal desenho representa uma conversão entre o enunciado do problema-objeto, expresso no registro da linguagem natural, e o registro clássico euclidiano para reta, considerado segundo Barbosa (2004, p. 2). No entanto, como indicam as relações descritas, a análise desta conversão aponta para uma não-congruência entre os registros, pois eles não permitem estabelecer uma correspondência semântica entre o significado das unidades elementares consideradas, ou seja, para *ponto* e *reta de S*, apesar de apresentarem, cada qual, uma unicidade semântica no registro de chegada.

Registro Semiótico de Partida	Registro Semiótico de Chegada		
Língua Natural (Enunciado do problema)	Registro não-Discursivo Euclidiano - Figura 1 		
Unidades Elementares	Correspondência Semântica das Unidades de Significado	Possibilidades Iguais de Aprecensão Visual	Unicidade Semântica no Registro de Chegada
<i>Ponto de S</i> (Elemento de um conjunto qualquer)	Sim (Ponto qualquer, como "ponto euclidiano")	Sim (Ponto qualquer, como "ponto euclidiano")	Sim ("Ponto euclidiano")
<i>Reta de S</i> (Conjunto com exatamente três pontos, isto é, conjunto de três pontos)	Não ("Reta euclidiana" com três pontos)	Não ("Reta euclidiana" com infinitos pontos, na qual se destacam três pontos)	Sim ("Reta euclidiana")

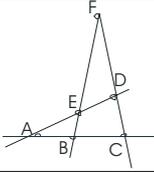
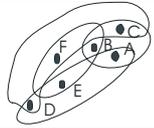
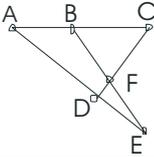
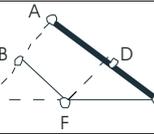
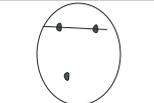
QUADRO 4. Apresentação de uma Conversão não-Congruente de Registros

A não-congruência entre os registros indica que a entrevistada considera a natureza dos *pontos de S* como "pontos da Geometria Euclidiana" e não como elementos quaisquer de um conjunto, enquanto que as *retas de S* são consideradas como "retas euclidianas". Isto permite que, ainda na Figura 1, uma particular solução do problema se apresente, na qual as *retas de S* são registradas como "retas euclidianas paralelas". Esta interpretação permitiu à entrevistada encontrar uma peculiar resposta desenvolvida da seguinte maneira: "*Eu tenho uma reta* [Desenhando a Figura 1], *porque aqui diz que uma reta contém exatamente três pontos. Mas por cada ponto passam duas retas, então nesse, nesse e nesse tem que passar* [Desenhando]. *Aí tem mais dois pontos* [Desenhando]. *Nesse ponto aqui tem que passar duas retas.* [Desenhando]. *Podem passar duas aqui, cada uma tem três pontos* [Completa o desenho], *então nove pontos*".

O registro semiótico apresentado na Figura 1 é amplamente conhecido nos estudos de Geometria Discreta, como um Modelo de Plano com “Figuras de Moinho” contendo 9 Pontos (CASTRUCCI, 1978, p. 11), sendo congruente às regras A1, A2 e A3. Esse número de pontos, no entanto, não satisfaz à condição quanto ao número mínimo para S e, portanto, não é uma resposta à questão-problema. Cabe salientar que a entrevistada ignorou esta condição e que a solução encontrada lhe era óbvia e, portanto, não merecedora de nenhuma conjectura quanto à sua adequação. Aparentemente, ao traçar os segmentos paralelos entre si, a entrevistada passou a considerar as *retas e pontos de S* por meio da percepção visual do desenho. Tudo indica que os traços componentes da configuração influenciaram a resolução do problema e as representações mentais de retas euclidianas paralelas impediram que ela refletisse sobre a resposta obtida. Da mesma forma que neste procedimento, relativo à Figura 1, em momentos posteriores da entrevista, se fizeram presentes várias ocorrências de outros exemplos de registros geométricos euclidianos prototípicos, na forma de retas horizontais e paralelas. Pelo exposto, tal incidência não pode ser negligenciada e nem ter negada a extensão de sua intervenção no âmbito da resolução do problema-objeto. Este fato vem ao encontro de pesquisas realizadas por educadores matemáticos israelenses sobre a incidência de imagens (mentais) geométricas prototípicas em crianças e adultos (HERSHKOWITZ; VINNER, 1983) e da sua emergência de maneira incontrolada (PRESMEG, 1997). Como consequência, o provável obstáculo cognitivo à busca da solução correta, no qual as retas paralelas têm papel preponderante, foi designado neste estudo por *Paralelismo*, enquanto que a particular resposta errada e representada na Figura 1, foi chamada de *Resposta Imagística Euclidiana Prototípica*.

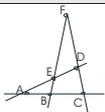
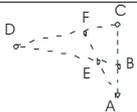
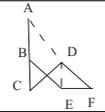
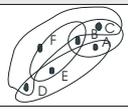
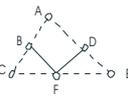
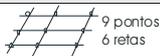
Sumário das categorias de eventos identificados

A partir das entrevistas constatou-se a recorrência de três conjuntos de categorias de eventos identificados nos procedimentos de resolução do problema-objeto, as quais foram referendadas pelas respostas ao questionário. Tais categorias são: *Registros Semióticos Adotados pelos Sujeitos*, *Respostas Elaboradas* e *Prováveis Obstáculos Cognitivos*.

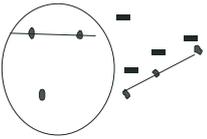
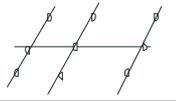
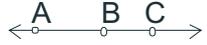
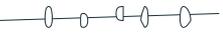
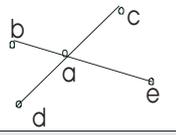
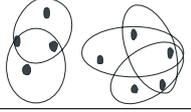
Qualificação dos Registros Semióticos Adotados pelos Sujeitos	Grafia
A) Registros Semióticos Convencionais à Matemática	
<p>Teoria dos Conjuntos O sujeito representa “pontos” ou “elementos” por letras maiúsculas, enquanto as “retas” são denotadas por letras maiúsculas colocadas entre chaves. São subentendidas as relações de pertinência entre elementos de conjuntos e suas operações, de união e de interseção. É a representação simbólica discursiva típica da Teoria dos Conjuntos.</p>	$\{A, B, C\} \{B, F, E\}$ $\{A, D, E\} \{C, D, F\}$
<p>Euclidiano O sujeito apresenta o traçado de “retas” com a configuração de um traço retilíneo, enquanto que as curvas se apresentam como pontos de um traço contínuo de forma qualquer. Os “pontos” são desenhados como interseção de duas retas, ou de duas curvas, ou como uma pequena marca da ponta do lápis. As “retas” podem também apresentar flechas e outros signos habitualmente empregados no desenho geométrico.</p>	
<p>Diagramas de Venn O sujeito representa as “retas” como subconjuntos, nos quais ficam subentendidas as relações de pertinência entre elementos e as operações de união e interseção entre conjuntos. Esta forma pode ser considerada como a de um registro não-discursivo típico da Teoria dos Conjuntos.</p>	
B) Registros Semióticos não-Convencionais à Matemática	
<i>I-B) Registros Discursivos</i>	
<p>Agrupamentos de Letras O sujeito representa “pontos” ou “elementos” por meio da utilização de um registro alternativo ao simbólico discursivo típico da Teoria dos Conjuntos, no qual as “retas” são expressadas como agrupamentos de letras. Nesta categoria, encontram-se todos os registros que se apresentam por meio de letras, números e pares ordenados.</p>	$ABC \ BFE \ ADE \ CDF$
<i>II-B) Registros não-Discursivos</i>	
<p>Pontos sobre Segmento O sujeito registra “pontos” ou “elementos” na forma de pontos isolados marcados sobre um segmento euclidiano suporte, o qual não faz parte do conjunto considerado de “pontos”. Tal suporte euclidiano pode ser indicado por alguma especificação típica do desenho geométrico euclidiano ou o sujeito explicita estar considerando alguma dessas especificações.</p>	
<p>Pontos sobre Vértices de Poligonais O sujeito registra “pontos” ou “elementos” como pontos isolados marcados sobre os vértices de dois segmentos euclidianos não colineares que foram a “reta”, que é uma poligonal euclidiana, cujos pontos não são considerados.</p>	
<p>Euclidiano-Diagrama de Venn O sujeito mescla traçados de diagramas de Venn com configurações de traços euclidianos, retilíneos ou curvos.</p>	

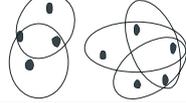
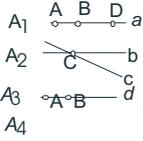
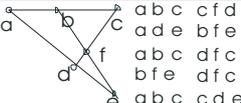
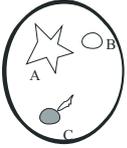
QUADRO 5. Registros Semióticos Adotados pelos Sujeitos nas Entrevistas e Questionário

Nos Quadros 5, 6 e 7 encontram-se as sínteses das ocorrências dessas categorias. Estes quadros se constituem de duas colunas: na da esquerda, apresentam-se a qualificação e a descrição de cada categoria. Na coluna da direita do Quadro 5, apresenta-se a grafia específica dos Registros Semióticos Adotados pelos Sujeitos, enquanto que na dos outros dois, estão exemplos ilustrativos de registros semióticos representantes das respectivas categorias.

Qualificação das Respostas Elaboradas	Registro Semiótico
A) Respostas Condicionalmente Corretas	
Resposta Imagística Euclidiana O sujeito recorre diretamente ao registro euclidiano considerando os “pontos” como pontos isolados sobre retas ou segmentos euclidianos, não convertendo a resposta para um registro discursivo. Aparentemente, o sujeito utiliza conhecimentos euclidianos para a criação dos pontos, e não as regras, como, por exemplo, ao recorrer à interseção de “retas”.	
Resposta Proposicional-Imagística Euclidiana Os “pontos” são criados, um a um, a partir da conversão das convenções e regras expressadas na linguagem natural para um registro não-discursivo: o de pontos isolados sobre retas ou segmentos euclidianos. Aparentemente os “pontos” não são criados somente a partir das afirmações do enunciado, o sujeito também utiliza conhecimentos euclidianos.	
Resposta Imagística não-Euclidiana O sujeito recorre diretamente ao registro de pontos isolados traçados sobre os vértices de poligonais euclidianas. Aparentemente os “pontos” não são criados somente a partir das afirmações do enunciado, o sujeito também recorre a conhecimentos euclidianos.	
B) Respostas Corretas	
Resposta Imagística não-Euclidiana com Diagramas de Venn O sujeito cria, um a um, os “pontos” a partir das afirmações do enunciado, diretamente em um registro de diagramas de Venn, não os convertendo para um registro discursivo.	
Resposta Proposicional não-Euclidiana O sujeito cria os “pontos” a partir das regras utilizando alguma linguagem discursiva, referente à Teoria dos Conjuntos, a agrupamento de letras etc.	{A,B,C} {B,F,E} {A,D,E} {C,D,F} g ABC BFE ADE CDF
Resposta Proposicional-Imagística Não-Euclidiana O sujeito cria os “pontos” a partir das regras utilizando alguma linguagem discursiva, referente à Teoria dos Conjuntos, a pares de elementos, a agrupamento de letras etc. Além disso, os “pontos” também são representados por meio de um registro não-discursivo e desenhados sobre vértices de poligonais euclidianas ou como elementos em diagramas de Venn.	{A,B,C} {B,F,D} {A,D,E} {C,E} C 
Qualificação das Respostas Elaboradas	
C) Respostas Erradas	
Toda forma de resposta não representante de uma situação correta ou condicionalmente correta	
I-C) Resposta Errada Especial	
Resposta Imagística Euclidiana Prototípica O sujeito considera os “pontos” obtidos pelo encontro de retas ou segmentos euclidianos pertencentes a feixes de retas paralelas ou a segmentos paralelos.	 9 pontos 6 retas

QUADRO 6. Respostas Elaboradas e alguns dos Respectivos Registros Semióticos

Qualificação dos Prováveis Obstáculos Cognitivos	Registros Semióticos
A) Prováveis Obstáculos Cognitivos Relacionados às Convenções	
<i>I-A) Subcategorias Euclidianas</i>	
<p>Ambigüidade de Significados O sujeito apresenta ambigüidade quanto ao significado de “ponto” e de “reta” (de S), considerando mais de um significado para cada uma dessas expressões, acarretando que os registros semióticos produzidos não são congruentes ao registro do enunciado do problema. Aparentemente, o sujeito não é consciente de seu procedimento mental, possibilitando com que a função cognitiva de denominação do objeto passe a ter função de objetivação.</p>	
<p>Paralelismo O sujeito recorre a uma representação gráfica de um feixe de retas ou segmentos paralelos euclidianos para apresentar as “retas”, cujas propriedades euclidianas específicas apresentam-se intervenientes.</p>	
<p>Densidade O sujeito considera características de infinitude e continuidade relativamente aos “pontos” e às “retas” nos registros (discursivos ou não). Declara estar considerando uma particular infinidade de elementos, ou ainda, representa a “reta” como euclidiana, por meio de um traço contínuo. Nestes casos, podem-se apresentar flechas e outros signos que indicam estar sendo utilizadas convenções do desenho geométrico.</p>	
<p>Colinearidade O sujeito subentende a colinearidade no traçado da “reta” do conjunto considerado, mesmo ao traçar apenas pontos isolados em registros não-discursivos.</p>	
<p>Pré-Existência de Registros O sujeito considera a existência de formas de se registrar “ponto” e “reta” como pertencentes a um sistema de registros pré-estabelecido e não aventado no contexto do enunciado do problema. O sujeito é aparentemente consciente da representação mental considerada e a julga imprescindível para a resolução do problema, pois explicita considerar uma particular representação semiótica.</p>	
<i>II-A) Subcategorias Gerais Relacionadas às Convenções</i>	
<p>Adoção de Noções Exógenas O sujeito admite particulares significados a “ponto” e “reta” relacionando-os a noções topológicas, métricas ou numéricas; ou ainda apresenta admitir outros significados não relacionados a conceitos euclidianos. O registro apresentado é não-discursivo e não-congruente a alguma convenção.</p>	
Qualificação dos Prováveis Obstáculos Cognitivos	
Registros Semióticos	
<p>Congruência Relativamente à Quantidade de Pontos O sujeito realiza, ou não reconhece visualmente, um registro não-discursivo congruente a uma convenção relacionada ao número de pontos para “reta”, apresentando uma quantidade de “pontos” diferente daquela estipulada pela convenção.</p>	
<p>Reconhecimento de Padrão de Registro O sujeito realiza um registro gráfico não-congruente a uma convenção relacionada com o reconhecimento visual de um padrão literal ou de traçado. No primeiro caso, padrões relativos a letras são trocados, no segundo, aqueles relativos ao traçado de figuras são substituídos por outros signos ou por outras figuras.</p>	
B) Prováveis Obstáculos Cognitivos Relacionados às Regras	
<p>Congruência a Alguma Regra O sujeito não reconhece a não-congruência a alguma regra, tanto no caso da realização de um tratamento em um mesmo registro, quanto no de um novo registro obtido por meio de uma conversão.</p>	

<p>B) Prováveis Obstáculos Cognitivos Relacionados às Regras</p>	
<p>Congruência a Alguma Regra O sujeito não reconhece a não-congruência a alguma regra, tanto no caso da realização de um tratamento em um mesmo registro, quanto no de um novo registro obtido por meio de uma conversão.</p>	
<p>Congruência a Todas as Regras O sujeito não apreende visualmente a congruência ou não-congruência a todas as regras, tanto no caso da realização de um tratamento em um mesmo registro, quanto no de um novo registro obtido por uma conversão.</p>	
<p>Regras em Conjunto O sujeito não considera todas as regras concomitantemente, tanto no caso da realização de um tratamento em um mesmo registro, quanto no de um novo registro obtido por meio de uma conversão. Ainda declara, ou representa, no registro traçado, a não-congruência a cada uma das regras e até mesmo indica regras inexistentes.</p>	
<p>C) Prováveis Obstáculos Cognitivos Relacionados à Peculiaridade do Registro Adotado</p>	
<p>Balizamento Imagístico O sujeito não identifica uma “reta” em decorrência de dificuldades instituídas pelas limitações, essencialmente visuais, impostas pelo registro não- discursivo adotado. Não realiza com sucesso uma transformação do tipo tratamento no âmbito do registro considerado. Aparentemente, tais dificuldades devem-se ao bloqueio causado pelo excesso de informações visuais, as quais não permitem ao sujeito reconhecer as proposições do enunciado, representadas no particular registro.</p>	
<p>Tratamento em Registro Discursivo O sujeito apresenta dificuldades no âmbito de um registro discursivo quando na realização de transformações do tipo tratamento, levando-o a grafar registros não-congruentes a alguma regra ou convenção.</p>	
<p>D) Provável Obstáculo Cognitivo Relacionado ao Processo de Resolução do Problema (Relativamente às Entrevistas)</p>	
<p>Qualificação dos Prováveis Obstáculos Cognitivos</p>	<p>Registros Semióticos</p>
<p>Bloqueio por Abdução Imagística O sujeito aparentemente se apresenta bloqueado à construção de uma possível solução ao problema-objeto a partir de procedimentos inferenciais proposicionais, argumentativos ou dedutivos, relacionados às afirmações do enunciado. O sujeito produz insistentemente abduções imagísticas da possível solução, apresentando resistência a interferências externas, não se deixando influenciar por perguntas geradoras, que buscam levá-lo a considerar as afirmações do enunciado. Em uma abdução imagística, o passo de abdução relativo à construção da possível solução é expresso em um registro não-discursivo, por meio de uma configuração pré-estabelecida de traços.</p>	

QUADRO 7. Prováveis Obstáculos Cognitivos e alguns dos Respectivos Registros Semióticos

Análise dos resultados obtidos

A avaliação do desempenho nas respostas relativas ao conjunto das entrevistas e ao conjunto das questões do questionário pode ser realizada a partir do Gráfico 1.

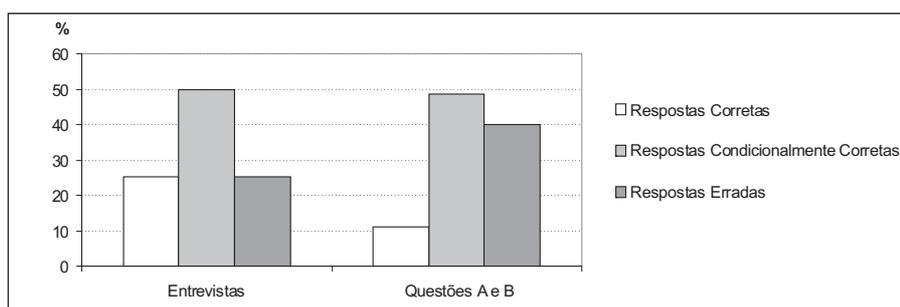


GRÁFICO 1. Desempenho nas Respostas

A partir deste gráfico, observa-se que a proporção de *Respostas Corretas* é muito baixa, aproximadamente 10% para o questionário, enquanto que as *Respostas Condicionalmente Corretas* ocorrem praticamente na mesma proporção (quase 50%), em ambos os instrumentos.

A significativa proporção de *Respostas Erradas*, de aproximadamente 40% nas questões do questionário, indica a grande dificuldade encontrada pelos professores. Cumpre salientar que os 25% de *Respostas Erradas* dos entrevistados representam uma avaliação subestimada dos resultados, pois em três das entrevistas foi desconsiderada a ocorrência de uma *Resposta Errada Imagística Euclidiana Prototípica* encontrada no início das mesmas. No questionário, as *Respostas Erradas* sob a influência de conceitos euclidianos, se apresentam em quase 35% dos participantes.

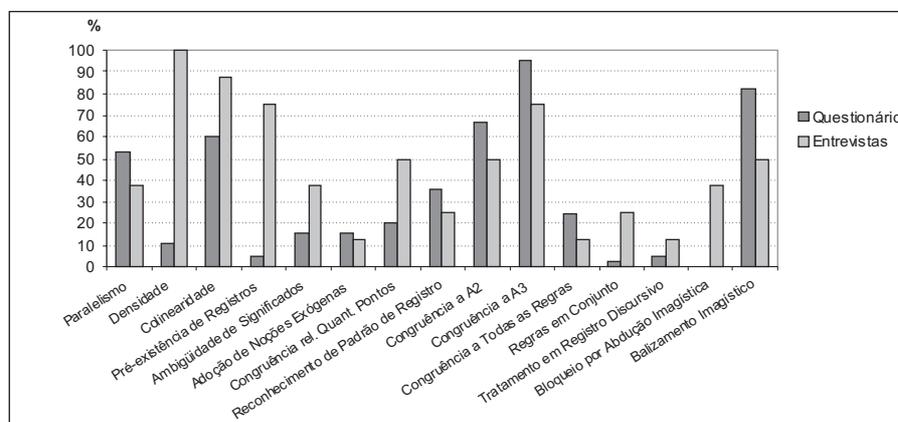


GRÁFICO 2. Ocorrências de Prováveis Obstáculos Cognitivos

Com relação à ocorrência de obstáculos cognitivos, pelo Gráfico 2, observa-se no confronto entre os resultados das entrevistas e as questões do questionário, que as tendências de ocorrência da maioria dos prováveis obstáculos cognitivos são preservadas. No entanto, no questionário, pode-se perceber que algumas discrepâncias são mais significativas, como para os obstáculos: *Densidade*, *Pré-Existência de Registros* e *Regras em Conjunto*, cuja discriminação se apresentou de difícil execução, devido à escassez de justificativas discursivas apresentadas por parte dos participantes.

A significativa ocorrência dos obstáculos relacionados à *Congruência das Regras (A2 e A3)*, apresentando proporções que variam de 50% a mais de 90%, aponta para as grandes dificuldades que o professor enfrenta relativamente ao entendimento de afirmações relacionadas aos quantificadores lógicos e à conversão de registros. A forte influência das características euclidianas de uma *Geometria de Incidência*, no que se refere à afirmação “*por dois pontos de S passa exatamente uma reta*”, foi dominante nestas situações, bem como o não entendimento da expressão “*no máximo*”, a qual foi confundida com “*no mínimo*” ou “*exatamente*”.

Por sua vez, as dificuldades relativas aos traçados em registros gráficos e ao excesso de informações visuais, próprias do obstáculo *Balizamento Imagístico*, ficam bem enfatizadas no questionário em uma proporção de mais de 80%. Enquanto que o obstáculo *Bloqueio por Abdução Imagística*,

típico das entrevistas, se apresenta em grande extensão, com quase 40% de ocorrências, evidenciando a não familiaridade dos pesquisados com procedimentos abduativos.

No que se segue, pretende-se a partir das informações sintetizadas no Gráfico 3, mostrar em que medida os prováveis obstáculos cognitivos se subordinam aos registros semióticos por meio dos quais as soluções foram encaminhadas.

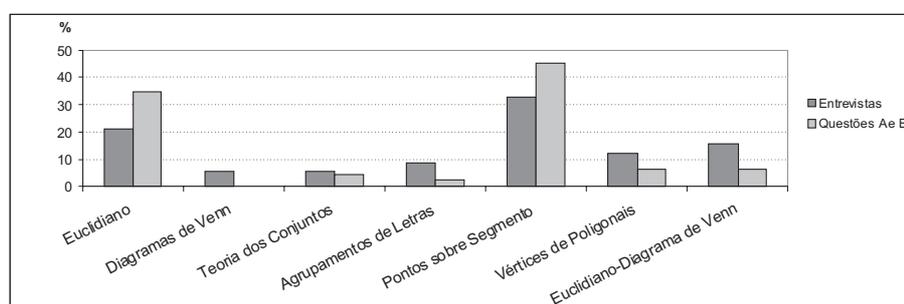


GRÁFICO 3. Registros Semióticos frente à Ocorrência de Prováveis Obstáculos Cognitivos

Inicialmente, pode-se observar a importância dos dois tipos particulares de registros semióticos de características euclidianas: *Euclidiano* e *Pontos sobre Segmento*. No caso do questionário, tais registros são responsáveis por cerca de 90% das causas de obstáculos cognitivos detectados. A tendência à ocorrência de dificuldades ocasionadas por estes registros apresenta-se também nas entrevistas: o *Euclidiano* sendo responsável por mais de 21% das causas de erros, enquanto que o *Pontos sobre Segmento*, por cerca de 33%. Vale salientar que nas entrevistas, neste mesmo registro, predominam os obstáculos *Colinearidade*, *Admissão de Pré-Registro* e *Congruência à Regra A3*. Em segundo lugar, cabe mencionar que somente cerca de 12% das dificuldades dos entrevistados ocorrem no registro que se distancia dos traçados euclidianos, ou seja, no de *Pontos Sobre Vértices de Poligonais*, enquanto que, no questionário, são cerca de 6%.

Por outro lado, nas entrevistas, as dificuldades apresentam-se distribuídas em todos os tipos de registros, enquanto que, particularmente no

questionário, o registro *Diagramas de Venn* aparece com índice zero de ocorrência. Ainda nas entrevistas, as discrepâncias não são tão grandes a favor dos dois registros de características euclidianas anteriormente considerados, embora ambos concentrem as ocorrências dos obstáculos. Cabe lembrar que, surpreendentemente, nenhum dos entrevistados fez uso espontâneo do registro discursivo típico da *Teoria de Conjuntos*. No entanto, aqueles que adotaram os registros mais adequados a conjuntos não apresentaram dificuldades significativas na resolução do problema, pois nas entrevistas somente cerca de 6% dos erros ocorreram neste registro e 9%, em *Agrupamentos de Letras*. No questionário, foram, respectivamente, cerca de 4% e 2%.

Cabe ainda mencionar que no questionário complementar referente à formação e ao conhecimento dos professores sobre Geometrias, aproximadamente 7% dos participantes afirmaram “*não saber o que seja o Plano Euclidiano*”. Cerca de 18% admitiram “*desconhecer os axiomas relativos a este plano*”, enquanto 20% afirmaram “*ignorar o que seja o 5º Axioma de Euclides*”. Ainda observou-se que aproximadamente 34% declararam “*não saber o que sejam Geometrias não-Euclidianas*” ou que “*desconhecem outra geometria além da Euclidiana*”, enquanto que pouco mais da metade dos participantes afirmaram “*não ter estudado Geometrias não-Euclidianas no respectivo curso de graduação*”.

Algumas conclusões

Pelo que foi apresentado no presente estudo, os cinco tipos de prováveis obstáculos cognitivos, aqui designados por subcategorias euclidianas, apresentam forte presença nas entrevistas e, portanto, podem ser considerados como balizadores do desempenho do indivíduo frente às atividades introdutórias às Geometrias não-Euclidianas. Por outro lado, pelo observado, as imagens prototípicas relacionadas a elementos euclidianos assumem caráter incontrolável intervindo de forma significativa nos procedimentos de resolução mapeados. A ampla incidência de algumas destas modalidades de imagens incontroláveis, como a decorrente da densidade dos pontos da reta, presente

em todos os entrevistados, sugere a importância que elas possuem.

Os resultados também indicam que a presença nos enunciados de termos homônimos do conhecimento euclidiano, bem como dos traçados a eles relacionados, interferem nos procedimentos de resolução de problemas. Assim, a interferência desses termos e de seus traçados típicos, em atividades introdutórias não-euclidianas, pode vir a acarretar sérias conseqüências tanto em relação ao entendimento do significado dos conceitos não-euclidianos, quanto a procedimentos de resolução de problemas e, possivelmente, até em demonstrações.

Por outro lado, a utilização do ferramental teórico relacionado à Lógica e à Teoria dos Conjuntos se mostra como um grande obstáculo ao entendimento dos enunciados, principalmente no que tange às afirmações expressas na forma de regras e convenções. Os resultados apontam para a necessidade de se dar maior atenção à linguagem habitualmente utilizada nos livros-texto matemáticos. Neles, é utilizada uma linguagem mista composta, tanto de termos da língua natural quanto de expressões próprias das linguagens simbólicas adotadas na Matemática. A experiência advinda de estudos semelhantes, principalmente realizados por Duval (1995, p. 144-148), aponta para a necessidade de se desenvolver ações específicas para a transposição de tais obstáculos, pois somente a exposição dos enunciados na forma tradicional, não se mostra suficiente para a compreensão das expressões apresentadas. Cabe enfatizar que os prováveis obstáculos cognitivos constatados e relacionados a expressões e aos quantificadores lógicos se apresentam tanto em situações envolvendo somente um registro semiótico, quanto naquelas que demandam conversões de registros.

Nos resultados aqui apresentados, também se nota que, embora registros gráficos sejam comumente adotados nos procedimentos de resolução, raramente a sua escolha é apropriada ao contexto pretendido. Por outro lado, é significativa a tendência dos professores de, ao adotarem tais registros não-discursivos, se aterem a um mesmo tipo de grafia ou a grafias com características muito próximas. Esta tendência, observada em adultos, coincide com a de adolescentes (DUVAL, 1998).

Os fatos aqui relatados mostram que, mesmo sujeitos com ampla

experiência profissional e escolaridade avançada não se movem com naturalidade entre diferentes registros semióticos, deixando de realizar conversões entre aqueles de características diversas, principalmente entre os registros discursivos e os registros gráficos. Conseqüentemente, estes profissionais se apresentarão pouco preparados para a implementação de práticas pedagógicas inovadoras e relacionadas a conversões de registros, as quais possibilitam a desejada compreensão integrativa dos conceitos matemáticos.

Em seu conjunto, os resultados do estudo aqui relatado indicam que a aquisição de conhecimentos geométricos não-euclidianos se apresenta como um significativo desafio aos meios de formação de professores. Desafio este, inserido em uma sociedade cada vez mais dependente de um aparato tecnológico, no qual as formas visuais, advindas de uma ampla gama de registros semióticos, são determinantes. Assim, é preciso se enfrentar os possíveis obstáculos que possam impedir adultos, responsáveis pelo ensino e pelo desenvolvimento da aprendizagem de jovens e crianças, a vencerem suas limitações cognitivas frente a esta realidade.

Os fatos constatados indicam que para se formar um professor mais capacitado a acessar os novos conhecimentos geométricos e que esteja preparado para ministrá-los na Escola, há necessidade de se processar uma grande transformação em sua formação. Mesmo no nível da formação continuada, no que concerne ao ensino das Geometrias, além das características matemáticas próprias a seus saberes, é necessário também se considerar os aspectos lingüísticos e cognitivos relacionados aos obstáculos à apreensão desses novos conhecimentos geométricos.

Referências

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 4ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática (5ª a 8ª séries)**. Brasília, 1998. Disponível em: <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/content/download/16619/119740/file> Acesso em: 20 nov. 2006.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos da geometria**. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1978.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

_____. Reasoning in geometry. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century**. Dordrecht: Kluwer, 1998. p. 37-51.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA MACHADO, S. (Ed.) **Aprendizagem matemática**. São Paulo: Papirus, 2003. p. 1-34.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical concepts. In: CUOCO, A., CURCIO, F. (Ed.) **The role of representation in school mathematics**. New York: NCTM, 2001. p. 1-23.

_____; VINNER, S. The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In: HERSHOKOWITZ, R. (Ed.). INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 7., 1983, Rehovolt. **Proceedings ...** Rehovolt: Weizmann Institute of Science, 1983. p. 223-228.

KALEFF, A. M. M. R. Capturando registros semióticos e suas conversões: um instrumento para a investigação de atividades matemáticas que envolvem registros gráficos. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 29., Caxambu, 2006. **Anais...** 1 CD-ROM. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/trabalhos/trabalho/GT19-1996-Int.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2006.

_____. **Da rigidez do olhar euclidiano às (im)possibilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de matemática**. 2004. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2004.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

MEIRA, L. Análise micro-genética e videografia: Ferramentas de Pesquisa em Psicologia Cognitiva. **Temas em Psicologia**, n° 3, p. 59-71. 1994.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. NCTM. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, 1989.

PRESMEG, N. Generalization using imagery in mathematics. In: ENGLISH, L. (Ed.). **Mathematical reasoning**. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 1997. p. 299-312.

VOSNIADOU, S. Capturing and modeling the process of conceptual change. **Learning and Instruction**, Oxford, v. 4, p. 45-69, 1994.

Aprovado em março de 2007
Submetido em novembro de 2006