Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007, pp. 179 a 205

Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino

Epistemology, Didactics of Mathematics, and Teaching Practices

Bruno D'Amore[1]

Tradução[2]: Giovanni Giuseppe Nicosia
Jeanine Soares

Resumo

Com este artigo pretendemos fornecer uma contribuição para uma visão unitária de vários termos e conceitos já tão difundidos na comunidade internacional daqueles que trabalham com didática da matemática, restituindo-lhes unidade e procurando as raízes históricas de sua inserção nessa comunidade. Apesar das diferentes acepções com que aparecem hoje em dia, muitos desses termos foram introduzidos, desde sua origem, principalmente por Guy Brousseau, graças a um esforço de síntese e de redefinição ad hoc. Tais termos evoluíram no tempo e algumas dessas evoluções são relativas aos temas mais clássicos; aqui limitamo-nos ao exemplo relativo ao contrato didático.

Palavras-chave: Epistemologia da Didática. Práticas de Ensino. Contrato Didático. Obra de Brousseau. Triângulo e Polígonos da Didática.

Abstract

With this article, we intend to contribute to a unitary vision of various terms and concepts spread throughout the international mathematics education community, giving them unity and seeking the historical roots of their introduction in that community.

[1] Departamento de Matemática, Universidade de Bolonha, Itália. Faculdade de Ciência da Formação, Universidade de Bolzano, Itália. Alta Escola Pedagógica, Locarno, Suíça. Escola de doutorado de pesquisa, Universidade Distrital de Bogotá, Colômbia. email: damore@dm.unibo.it

[2] O autor agradece a Maria Cristina Bonomi Barufi pela competente contribuição dada à realização deste artigo em português.

Despite the different meanings attributed to them today, many of these terms were introduced from their origins, mainly by Guy Brousseau, striving for synthesis and ad hoc redefinition. They evolved over time, and some of these evolutions relate to the most classical topics. Here we focus on the example of the didactic contract.

Keywords: Epistemology of Didactics. Teaching Practice. Didactic Contract. Brousseau's Works. Didactic Triangle and Polygons.

Resumen

Con este artículo se quiere contribuir a dar una visión unitaria de varios términos y conceptos difusos en la comunidad internacional de quien se ocupa de didáctica de la matemática, restituyéndoles unitariedad y buscando las raíces históricas de su ingreso en dicha comunidad. Aún en sus diversas acepciones en las cuales hoy se usan, muchos de estos términos fueron introducidos desde sus orígenes gracias a la obra de Guy Brousseau, con un esfuerzo de síntesis y de redefinición ad hoc. Estos han evolucionado en el tiempo y algunas de dichas evoluciones atañen los temas clásicos; aquí nos limitamos al ejemplo relativo al contrato didáctico.

Sunto

Con questo articolo si intende dare un contributo ad una visione unitaria di vari termini e concetti oramai diffusi nella comunità internazionale di chi si occupa di didattica della matematica, restituendo loro unitarietà e cercando le radici storiche del loro inserimento in tale comunità. Pur nelle diverse accezioni con cui oggi compaiono, molti di questi termini furono introdotti fin dalle origini, principalmente ad opera di Guy Brousseau, con uno sforzo di sintesi e di ridefinizione ad hoc. Essi si sono evoluti nel tempo ed alcune di tali evoluzioni riguardano i temi più classici; qui ci si limita all'esempio relativo al contratto didattico.

Résumé

Cet article veut donner une contribution dans la direction d'une uniformisation des termes et des concepts très diffusés dans la communauté internationale de la didactique des mathématiques, en leur donnant ainsi unitarité et en même temps en recherchant leurs racines historiques de leur insertion dans cette communauté. Une bonne partie de ces termes ont été introduits, avec la même signification d'aujourd'hui, par Guy Brousseau, grace à un effort de synthèse et de redéfinition ad hoc. Dans le temps, certains d'entre eux, concernant les thèmes les plus classiques, ont évolué; dans cet article on se borne à l'exemple relatif au contract didactique.

Zusammenfassung

Dieser Artikel will sein Beitrag im Sinne der Standardisierung der Begriffe und der Konzepte geben, die in der internationalen Gemeinschaft der Didaktik der Mathematik sehr verbreitet sind. So gibt man ihnen Einheitlichkeit und gleichzeitig versucht man die historischen Wurzeln ihrer Einfügung in dieser Gemeinschaft. Viele dieser Begriffe waren mit der heutigen Bedeutung von Guy Brousseau eingeführt, dank einer seltsamen Anstrengung von Synthese und Neudefinierung. In der Zeit einige unter ihnen, die die klassischeren Themen betreffen, haben sich entwickelt; in diesem Artikel beschränkt man auf das Beispiel des didaktischen Vertrags.

Epistemologia, conhecimento e convicções

O termo "epistemologia" passou a fazer parte da didática da matemática já nos anos '60, junto com as diferentes acepções que conduzem a várias "definições" e interpretações nos diversos países do mundo e em múltiplas situações.

Remetendo a Brousseau (2006a,b) para uma análise crítica comparada desse termo e das suas diversas ocorrências, aviso que sempre vou me referir, mesmo quando não os citarei explicitamente, a esses dois recentes trabalhos de Brousseau e a muitos outros dele, que aparecem nas referências e no apêndice. Algumas das frases subseqüentes são retiradas desses textos, talvez com um pouco de liberdade, mas no mesmo espírito. A fim de não deixar pesado este texto, nem sempre citarei explicitamente o trabalho de Brousseau ao qual estiver me referindo.

No nosso campo de pesquisa:

- uma *concepção epistemológica* é um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los;
- a *epistemologia* é uma tentativa de identificar e de unificar concepções epistemológicas diferentes relativas a determinadas ciências, a movimentos intelectuais, a grupos de pessoas, a instituições, ou a culturas.

Para alguns desses termos, seguimos as definições dadas em D'Amore, Fandiño Pinilla (2004):

- *convicção* (belief) (ou crença): opinião, conjunto de juízos e expectativas, o que se pensa sobre alguma coisa;
- o conjunto das convicções de alguém (A) sobre alguma coisa (T) fornece a *concepção* (K) de A relativamente a T; se A pertence ao grupo social (S) e compartilha com os outros membros de S aquele conjunto de convicções sobre T, então K é a concepção de S relativamente a T. Muitas vezes, em vez de "concepção de A relativamente a T" fala-se de "imagem que A tem de T".

Para outros termos, referimo-nos a enciclopédias ou manuais confiáveis: por *saber* entendemos um conjunto de conhecimentos ou atitudes que podem ser reproduzidos, adquiridos por meio do estudo ou da experiência.

No âmbito da psicologia cognitiva faz-se a distinção entre os *saberes* e os conhecimentos:

- os saberes são dados, conceitos, procedimentos ou métodos que existem no exterior de cada sujeito que conhece e que são geralmente codificados em obras de referência, manuais, enciclopédias, dicionários;
- os conhecimentos são indissociáveis de um sujeito que conhece; isto é, não existe um conhecimento a-pessoal; uma pessoa que interioriza um saber, *tomando consciência*, transforma esse saber em conhecimento.

Voltemos agora à questão da didática; ela é ampla e pode ter origem em várias raízes, uma das quais se encontra no debate entre

Didática e pedagogia

A *grande didática* de Comenius demorou a morrer: «um método único basta para ensinar todas as matérias… as artes, as ciências e as línguas» (COMENIUS, 1657).

Foram necessários séculos para conseguir estabelecer de maneira definitiva que as didáticas podem ser e são específicas; isso foi útil para a didática (geral) se libertar do jugo da pedagogia e para as didáticas específicas (disciplinares) chegarem a um status autônomo.[3]

Analogamente ao sentido que demos pouco acima à epistemologia, podemos dizer que a didática de um conhecimento (de um objeto, de um fato, de uma disciplina…) pode então ser redefinida como um projeto social de fazer adquirir esse conhecimento por meio de um organismo.

É nessas condições "sociais" que queremos evidenciar algumas possíveis peculiaridades da

Didática da matemática

1. A didática da matemática (que nós consideramos como um aspecto da educação matemática mais geral) é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal).[4] Aqui é preciso entender que a aprendizagem como um conjunto de modificações de comportamentos (portanto de realizações de tarefas solicitadas) que assinalam, para um observador pré-determinado, segundo sujeito em jogo, que o primeiro sujeito dispõe de um conhecimento (ou de uma competência)[5] ou de um conjunto de conhecimentos (ou de competências), o que impõe a gestão de diversas representações, a criação de convicções específicas, o uso de diferentes linguagens, o domínio de um conjunto de repertórios de referências idôneos, de experiências, de justificações ou de obrigações. Essas condições têm que poder ser colocadas em ação e reproduzidas intencionalmente. Nesse caso fala-se de práticas didáticas.[6]

2. Essas práticas didáticas são elas próprias "condições" e, portanto, por sua vez, objeto de estudo. A didática apresenta-se então como o estudo de tais condições, na forma de projetos e de realizações efetivas.

---

[3] Por outro lado, ainda muitas coisas poderiam ser encontradas nessa obra, não totalmente explorada pelos críticos modernos. Pretendo fazê-lo.

[4] Neste texto, o termo arte deve ser entendido como a tradução do latim *ars*, isto é um conjunto dificilmente separável dos atuais termos arte e artesanato; artista era, na acepção latina, qualquer artista (no sentido moderno da palavra), mas também qualquer artesão; no mundo latino essas duas figuras fundiam-se numa só, sem possibilidade de distinção.

[5] Sobre a distinção entre conhecimento e competência, veja-se D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

[6] Sobre o tema das práticas, veja-se D'Amore (2005) e D'Amore, Godino (2006).

3. Os estudos científicos – de tipo experimental – nesse campo necessitam da explicitação de conceitos e métodos que têm que ser submetidos a exigências de verificação de coerência e de adequação à contingência específica. Certas teorias, como por exemplo, a teoria das situações didáticas, têm como objeto dizer o que estuda a didática.

Entre os diversos objetos de estudo da didática, um papel completamente fundamental, embora às vezes implícito, pertence ao

***Milieu* (ambiente, meio)**

Da teoria das situações sabemos que o professor tem que provocar no aluno comportamentos, que o próprio aluno, a fim de manifestar seu conhecimento, teria que adotar autonomamente. Parece um paradoxo. Aliás: é um paradoxo. A única solução consiste em envolver um terceiro elemento, o *milieu*, e fazer com que a resposta do aluno se refira exclusivamente às necessidades do *milieu*, que o professor conhece bem, ou que predispôs para esse fim. A arte do professor está então na organização de uma relação entre aluno e *milieu*, que:

- por um lado, deixa uma razoável incerteza que deve ser reduzida pelos conhecimentos do sujeito;
- por outro lado, faz com que essa redução possa realmente ocorrer, isto é, com um grau de incerteza limitado, do ponto de vista do professor.

Daí entende-se o papel do *milieu*, fundamental para entender o funcionamento da

Teoria das situações matemáticas

A *teoria das situações matemáticas* (situações a-didáticas) tem como objeto a definição das condições nas quais um sujeito é levado a "fazer" matemática, a utilizá-la ou a inventá-la, sem a influência de condições didáticas específicas determinadas e explicitadas pelo professor.

Essa teoria visa então à criação, à organização e à utilização de problemas que conduzem à construção de conceitos e de teorias matemáticas por parte de um sujeito com algumas propriedades e conhecimentos mínimos, tais de tornar bastante provável o desenvolvimento do processo determinado pela situação.

Com base nos dois últimos pontos, podemos encarar as *situações* como sistemas de interação de um ou mais sujeitos com um *milieu*, sujeitos esses que necessitam de um conhecimento preliminar para poder agir.

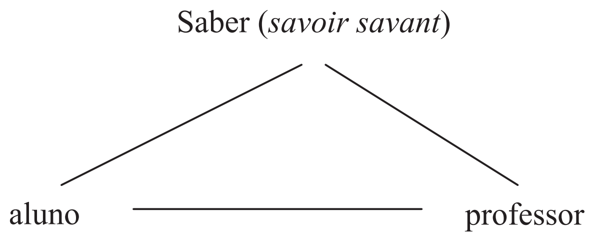
Os elementos da teoria são definidos segundo sua função numa situação. Isto é análogo ao método normalmente utilizado em matemática, segundo o qual um objeto é definido com base em relações com outros objetos (axiomas ou definições).

Assim, um *evento didático* se torna um conjunto de fatos que podem ser interpretados a respeito da evolução de uma situação didática. Essa interpretação é um dos objetivos da didática da matemática, e leva à concepção de *microdidática*, entendida como o estudo das condições de difusão ou de trocas de conhecimentos (por exemplo, por meio de aulas), entre pessoas, organizações sociais, econômicas ou culturais.

Para representar esquematicamente essa situação, começou-se a utilizar recentemente diversos esquemas que Brousseau chama de

"Polígonos" da didática

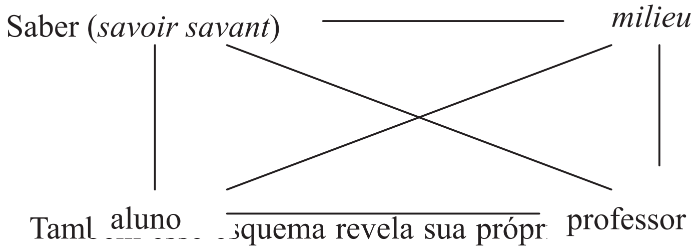
O mais famoso e citado é o *triângulo da didática*:[7]



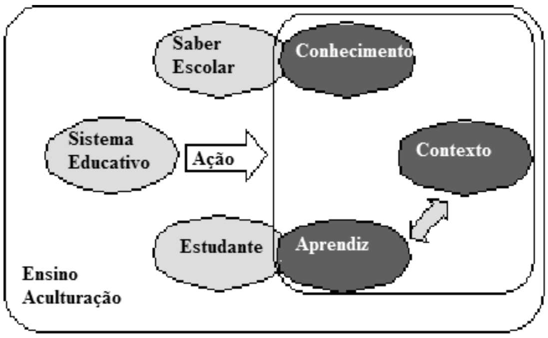
Mas nesse esquema não aparece o *milieu*, o que revela a sua insuficiência. Introduzindo esse novo "vértice" podemos passar a um *quadrilátero da didática*:

---

[7] Uma análise critica e construtiva do triângulo da didática encontra-se em D'Amore, Fandiño Pinilla (2002).



Taml[...] squema revela sua própr[...] quando consideramos que nele não se evidencia a diferença entre os "saberes" escolares a ensinar ou ensinados de fato e os "conhecimentos" do aluno, que não coincidem e que funcionam segundo diferentes modalidades; além disso, mesmo as peculiaridades do sujeito que aprende são diferentes, o que leva a um "hexágono da didática", traduzido por Guy Brousseau neste esquema que evidencia seu significado funcional.



No futuro, sempre teremos que entrar numa análise profunda desse esquema e de seus significados relacionais implícitos. E também usá-lo para estudar os eventos didáticos em sala de aula.

Antes de passar ao significado de um "resultado de pesquisa em didática da matemática" e, finalmente a exemplos de contrato didático, quero sublinhar como as relações entre didática e epistemologia se revelam apenas durante a realização de uma pesquisa, em casos específicos e exemplares.

Obstáculos epistemológicos: um exemplo histórico que mudou a aparência da didática

É bem sabido que Guy Brousseau estudou por quase três décadas (do início dos anos ‘60 até o final dos anos ‘80) a maneira pela qual se aprendem os números naturais e sua estrutura. Nos anos ’60 (e, em alguns casos, mesmo depois) predominavam algumas idéias que hoje consideramos curiosas, baseadas em diversas “teorias” sobre a aprendizagem dos números naturais por crianças do início da escola primária.[8] Por exemplo, considerava-se óbvia a existência de uma necessidade de aprendizagem específica para proceder na aprendizagem oral e escrita dos números naturais segundo a escansão da sucessão ordinal, primeiro 1, depois 2, depois 3 e assim por diante. Insistia-se muito naquela época no uso de materiais pré-constituídos baseados nessa suposta necessidade, fortalecendo-a conseqüentemente.

Creio ser bem conhecido o fato que Brousseau *demonstrou* amplamente como isso fosse totalmente falso e como a aprendizagem dos naturais aconteça “por saltos”. Também creio ser muito conhecido o seu estudo antropológico e epistemológico sobre as escritas dos números, comparando três sistemas diferentes: (1) o assim chamado “de Robinson Crusoé” (uma marca para cada unidade com um espaço entre cada duas delas), (2) o dos antigos Romanos, (3) o de alguns materiais estruturados pré-construídos para tal objetivo didático, com o posicional de base dez indo–arábico atual.

Ele introduziu a idéia de “zonas de melhor eficácia” para mostrar como existem intervalos numéricos em que um sistema de escrita é mais eficaz do que outro. Por exemplo, no intervalo 1-3, o método de Robinson é mais eficaz do que a escrita romana e do que a nossa numeração decimal (tanto no uso como na aprendizagem). No intervalo 100-1000, a ordem é inversa. Seguindo nesse sentido e estudando outros intervalos intermediários, Brousseau chegou a sugerir uma “aprendizagem por saltos” que propôs já em 1965 num livro para a escola primária, publicado por Dunod (BROUSSEAU, 1965). Tal aprendizagem pode acontecer “por invenção”, como é típico das situações a-didáticas.

O estudo continuou com a aprendizagem das operações, mas o método podia ser estendido para o estudo da aprendizagem de um algoritmo ou de uma teoria matemática. E daí para aquele de qualquer conhecimento.

Os saltos de complexidade “informacionais” são então mais freqüentes

---

[8] Na Itália, a escola primária corresponde ao primeiro ciclo do Ensino Fundamental no Brasil. (N.T.)

e melhor justificados na descoberta matemática, do que a progressão passo a passo. Por outro lado, os alunos encontram muitas dificuldades nas zonas de transição entre certos intervalos numéricos. Esses dois indícios levaram Brousseau à hipótese de que o fenômeno dos saltos era geral, ao menos em matemática, e que a sua análise teria que ser a base de qualquer engenharia didática.

Esta idéia foi exposta em 1976: há trinta anos!

Foram esses tipos de estudos, contrariamente ao que declarava Gaston Bachelard (1938) a respeito da inexistência de obstáculos epistemológicos em matemática, que fizeram surgir tal conceito no interior da pesquisa didática. A compreensão dos números naturais exige, por exemplo, certa maneira de conceber esses números e suas operações: um número natural como 4 tem um sucessivo; o seu produto por outro número natural será maior que esse número etc. Algumas dessas propriedades falham quando 4 é encarado como um número racional: por exemplo, não tem mais sucessivo. Mas o estudante não se dá conta dessa passagem e continua "forçando" as propriedades de N também em Q; por esse motivo encontram-se estudantes que afirmam, em Q, que 2,33 é o sucessivo de 2,32, ajudados nisso até por alguns livros-textos. E, além disso, por exemplo, $0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$ é menor do que cada um dos fatores, novidade desconcertante que leva a criticar o conhecimento precedentemente adquirido.

O estudante, dizia, quase não percebe essa transformação de saber. O professor chama de "multiplicação" ou "divisão" novas operações e gostaria que os estudantes as "reconhecessem" e assimilassem às anteriores. O conhecimento dos números naturais é indispensável para adquirir o conhecimento dos racionais, mas, ao mesmo tempo, é um obstáculo para essa aquisição. Esse fenômeno gera equívocos e dificuldades importantes e invisíveis porque o obstáculo se esconde no interior de um saber que funciona, mas que é "local" e que não pode ser generalizado para o objeto matemático que deveria ser aprendido.

Este é o sentido da idéia de *obstáculo epistemológico*.

Falta ainda esclarecer o que entender então com

"Resultados" das pesquisas em didática da matemática

Os que denominamos "resultados" são, segundo Brousseau, principalmente de dois tipos:

• afirmações (não contraditas) sobre um campo de experiências bastante amplo;

• recusa de convicções contraditas pelas experiências.

Exemplos de resultados do primeiro tipo:

1. O conhecimento que um sujeito pode ter sobre um determinado saber matemático depende das circunstâncias nas quais teve a oportunidade de utilizá-lo; este é um axioma básico da teoria das situações didáticas que nunca foi contradito.

2. É possível ensinar a matemática de maneira relativamente direta com um sentido implícito correto, limitando assim a transposição didática.

3. É possível determinar condições razoavelmente reproduzíveis do *uso* e da *aquisição* dos conhecimentos matemáticos sob a forma de sistemas (as "situações"); é também relativamente possível determinar condições (diferentes) razoavelmente reproduzíveis de seu *ensino*.

4. É possível comunicar essas condições aos professores. É melhor, sob muitos pontos de vista, comunicar-lhes as situações do que algoritmos fechados ou indicações demasiado gerais. Esse último ponto tem várias repercussões sociais.

Exemplos de resultados do segundo tipo:

1. A idéia que a história individual de um sujeito que aprende possa ser expressa em termos de acréscimos sucessivos de conhecimentos definitivos, da infância até a universidade, é uma aproximação grosseira. Considerada ao pé da letra, pode gerar equívocos, decisões erradas e insucessos. As concepções resultam limitadas e deformadas, muitas vezes de maneira escondida. É necessário retomar e reorganizar várias vezes o saber matemático, mesmo quando esse saber parece adquirido.

2. O construtivismo radical é uma teoria adequada para as situações a-didáticas, mas não para as situações didáticas. A institucionalização dos conhecimentos é uma etapa indispensável da aprendizagem e é constitutiva do saber em relação aos conhecimentos.

3. As descrições atuais dos conhecimentos matemáticos dos alunos (no sentido administrativo e popular) são inadequadas. Essas descrições levam pais, professores e administradores a subestimar os resultados da atividade didática. O uso dessas descrições para tomar decisões sobre a política do ensino, currículos, leis, organismos, sem conhecimentos didáticos adequados leva a conseqüências desastrosas. Leva, inclusive, os professores a colocar o foco na aquisição de saberes por parte dos alunos, deixando do lado o problema da manutenção dos conhecimentos, indispensáveis à gênese dos próprios saberes. Essa degeneração do ambiente didático causa ao final um verdadeiro abaixamento dos conhecimentos e dos saberes dos alunos, que realimenta o sistema de decisões negativas.

De tudo isso emerge a necessidade do professor conhecer usos e necessidades do conhecimento epistemológico; existe, contudo, uma epistemologia que podemos chamar de (SPERANZA, 1997; BROUSSEAU, 2006a)

Epistemologia espontânea dos professores

A fim de tomar suas decisões em sala de aula, os professores utilizam, explicita ou implicitamente, qualquer tipo de conhecimentos, métodos, convicções sobre a maneira de encontrar, aprender ou organizar um saber. Essa bagagem epistemológica é essencialmente construída de modo empírico para satisfazer às necessidades didáticas. Algumas vezes, é o único instrumento que lhes permite propor os processos didáticos escolhidos e de fazê-los aceitar pelos alunos e pelo ambiente deles. O conjunto das convicções dos professores, dos alunos ou dos pais sobre o que convém fazer para ensinar, para aprender e para compreender os saberes que estão em jogo constitui uma *epistemologia* prática que é impossível ignorar ou eliminar. A epistemologia filosófica ou científica está longe de poder pretender assumir esse papel.

A epistemologia espontânea tem suas raízes numa prática antiga, dado que a tendência para comunicar experiências de uma geração para a sucessiva é característica essencial da humanidade. Seria absurdo colocá-la em oposição aos conhecimentos científicos: é preciso respeitá-la, compreendê-la e estudá-la experimentalmente, como um fenômeno "natural".

A utilidade da introdução da epistemologia e das teorias científicas, aferentes à formação dos professores, apresenta-se então segundo um novo aspecto. (D'AMORE, 2004).

Mas, antes de prosseguir, é necessário mostrar um exemplo preciso do funcionamento dos dois tipos de epistemologia que acabamos de apresentar. Vamos fazer isto através de um exemplo retirado de Brousseau (2006b).

A dupla obrigação das situações didáticas

O professor propõe aos seus alunos um problema que considera *análogo* a um problema que havia proposto precedentemente, mas no qual eles haviam fracassado. O professor espera que eles reconheçam a semelhança e que utilizem a correção e as explicações que havia dado para *reproduzir* o mesmo método de resolução, a fim de enfrentar com sucesso a nova situação. Aconselha fortemente então que seus alunos procurem utilizar essa analogia. Esse procedimento leva ao sucesso segundo o professor. Mas, na realidade, é uma fraude epistemológica. O aluno produz uma resposta correta, mas não porque tenha entendido a sua necessidade matemática ou lógica a partir do enunciado, não porque tenha "compreendido e resolvido o problema", não porque tenha aprendido um objeto matemático, mas simplesmente porque estabeleceu uma semelhança com outro exercício; ele apenas reproduziu uma solução já feita por outros para ele. O pior é que ele tem consciência que isso é o que o professor quer. Então acreditará ter compreendido a questão matemática em jogo, enquanto que só interpretou uma intenção didática expressa explicitamente pelo professor e forneceu a resposta esperada.

Esse "abuso da analogia" que Guy Brousseau já evidenciou desde o final dos anos '70, mas sobre o qual se baseiam ainda hoje muitas ações didáticas em sala de aula, é uma das mais freqüentes formas daquilo que ele mesmo denominou o "efeito Jourdain", um dos efeitos do contrato didático. O professor obtém a resposta esperada com meios que não têm valor e faz com que o aluno (a família, a instituição) acredite que completou uma atividade matemática que era o objetivo a ser alcançado.

A atividade do aluno tem que atender a duas obrigações incompatíveis:

- aquela determinada pelas condições a-didáticas que determinam uma resposta original e a organização de conhecimentos específicos;
- aquela determinada pelas condições didáticas que têm o objetivo de fazer produzir a resposta esperada, independentemente da modalidade de produção.

Esse exemplo mostra que, se a epistemologia e as ciências cognitivas podem estudar e encontrar motivos para as respostas dos alunos só em relação à primeira obrigação, não podem ajudar os professores ignorando a segunda. As obrigações didáticas vão acabar oprimindo as obrigações cognitivas. Elas transformam a própria natureza dos conhecimentos e seu funcionamento. O ensino vira assim uma simulação da gênese dos conhecimentos.

Tudo isso explica a necessidade de estudos específicos de didática da matemática, que não podem ser reconduzidos a teorias da aprendizagem, nem a estudos exclusivamente epistemológicos. O contrato didático, pela sua força e suas características extraordinárias, será o objeto dos exemplos sucessivos. Guy Brousseau revelou sua importância à comunidade científica desde os anos ’60.

A interpretação de acontecimentos na sala de aula à luz de instrumentos da pesquisa didática: o exemplo do contrato didático

Numa pesquisa sobre problemas com dados ausentes e sobre as atitudes dos alunos diante de problemas desse tipo (D’AMORE; SANDRI, 1998), eis um texto proposto numa “III série primária” (alunos de 8-9 anos) e numa “II série média”[9] (alunos de 12-13 anos):

«Giovanna e Paola vão fazer compras; Giovanna gasta 10.000 liras e Paola gasta 20.000 liras. No final quem que fica com mais dinheiro na carteira, Giovanna ou Paola?».

E eis um protótipo do tipo de respostas mais freqüentes na III série primária; escolho o protocolo de resposta de Stefania, que reproduzo aqui exatamente como a aluna o redigiu:[10]

[9] Na Itália, a escola média corresponde ao segundo ciclo do Ensino Fundamental no Brasil. (N.T.)
[10] Infelizmente, mesmo procurando manter o “sabor” original, ao traduzir, podem perder-se algumas especificidades. (N.T.)

Stefania:

Na carteira sobra mais dinheiro giovanna
30-10=20
10×10=100

Como se trata de um "contrato", há tempo procuro algumas "constantes de comportamento" que se podem chamar "cláusulas";[11] neste caso duas delas têm um papel importante:

- *cláusula das expectativas*: a professora espera, com certeza, uma resposta, então tenho que fornecê-la, não importando o sentido do texto;
- *cláusula da constância*: a professora *sempre* deu problemas com um texto escrito em palavras e com alguns números e, para produzir o resultado, *sempre* eu tive que operar sobre esses números com operações: se *sempre* foi assim, certamente será assim *também* esta vez.

A resposta "Giovanna" (58,4% de tais respostas na III série primária; idade dos alunos 8-9 anos) é justificada pelo fato que o aluno pensa que, se o professor dá um problema, ele *deve poder ser resolvido*; então, mesmo percebendo que falta o dado da quantia inicial, o inventa implicitamente mais ou menos da maneira seguinte: «Este problema *deve* ser resolvido; então talvez Giovanna e Paola no começo tivessem a mesma quantia». Com essa hipótese, *a resposta é correta*: Giovanna gasta menos então fica com mais dinheiro. Isso justifica a parte escrita da resposta da Stefania. Logo depois se ativa outro processo devido a outra cláusula (do tipo: imagem da matemática, expectativas pressupostas do professor): «Assim não pode ser suficiente, em matemática é preciso fazer cálculos, a professora os espera com certeza». Então qualquer controle crítico cai e qualquer cálculo serve.

No trabalho D'Amore, Sandri (1998), nomeamos essa cláusula do contrato didático: "exigência da justificação formal" (ejf),[12] estudando-a em

[11] Para essa idéia, que comecei usar no início da década de 90, utilizei Chevallard (1988) que, falando de metacontrato, citava esse termo, embora com outro sentido.
[12] Em italiano, "esigenza della giustificazione formale": egf.

cada detalhe (também em trabalhos sucessivos). A cláusula ejf encontra-se muito presente também na escola média (idade dos alunos: 11-14 anos). [O percentual de respostas "Giovanna" cai de 58,4% na III série primária (8-9 anos) a 24,4% na II série média (12-13 anos); mas apenas 63,5% dos alunos de II série média apontam de alguma maneira a impossibilidade de dar uma resposta; então 36,5% fornecem uma resposta: em media, mais de 1/3 dos alunos].

Eis um protótipo de resposta para o mesmo problema na II série média; escolhi o protocolo de resposta de uma aluna, transcrevendo-o exatamente como ela o produziu:

> Silvia:
>
> Eu acho que quem tem mais dinheiro na carteira é Giovanna
> porque:
> Giovanna gasta 10.000 enquanto que Paola gasta 20.000.,
> 10.000 20.00 [sic]
>
> Giovanna Paola
> 20.000-10.000=10.000 (dinheiro de Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (dinheiro de Paola)

No protocolo da Silvia reconhecemos as mesmas cláusulas do contrato didático que atuavam no da Stefania, mas sua análise é mais complexa. Em primeiro lugar, nota-se uma tentativa de organização lógica e formal mais profunda. Em segundo lugar, Silvia primeiro escreve espontaneamente "Giovanna" sem nenhum cálculo, porque raciocinou como Stefania; mas depois, por causa da cláusula ejf, considera *ter que* produzir cálculos. Provavelmente tem consciência, mesmo que de maneira confusa, que as operações que está fazendo não têm conexão com a lógica do problema, só as faz porque pensa *ter que fazer* algum cálculo. Mas, embora absurdos, acaba assumindo-os como se fossem plausíveis: tanto é verdade que, como a partir desses cálculos sem sentido obtém um resultado que não condiz com o que achou intuitivamente, prefere violentar a sua própria intuição e aceita o que obteve por via formal: os cálculos dão "Paola" como resposta e não "Giovanna", como havia pensado; então risca "Giovanna" e no lugar escreve "Paola":

> Eu acho que quem tem mais dinheiro na carteira è ~~Giovanna~~ Paola
> porque:
> Giovanna gasta 10.000 em quanto Paola gasta 20.000,
> 10.000 20.00 [sic]
> Giovanna Paola
> 20.000-10.000=10.000 (dinheiro de Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (dinheiro de Paola)

O contrato didático, que desta vez é ditado por uma imagem formal (vazia, deletéria) da matemática, venceu, derrotando a razão.

Em D'Amore (1993), relato uma experiência baseada no texto seguinte, distribuído numa escola primária em diversas turmas:

«Os 18 alunos da segunda série querem fazer uma excursão de um dia de Bolonha a Verona. Eles precisam levar em conta os seguintes dados:

- dois deles não podem pagar;
- de Bolonha até Verona há 120 km;
- um ônibus de 20 lugares custa 200.000 liras por dia mais 500 liras por quilômetro rodado (incluindo os pedágios da rodovia).

Quanto gastará cada aluno?».

É inútil dizer que se trata de um problema complexo, que realmente desejava-se programar uma excursão, que os estudantes teriam que discutir o problema e procurar a solução coletivamente etc.

Na realidade, quase todos os estudantes, ao enfrentar esse problema, cometem um erro recorrente: não consideram a viajem de volta, e calculam então o gasto total com a expressão errada: $500\times120 + 200000$, no lugar de $(500\times120)\times2+200000$.

A respeito de questões desse tipo existe uma vasta bibliografia que procura justificar essas escolhas. Uma das justificativas mais freqüentes é uma espécie de esquecimento estratégico ou afetivo: a ida numa excursão é um momento emocionalmente forte, enquanto que a volta não é.

Procurando entender melhor a questão, dividi o problema em várias componentes ou fases, com muitas “perguntas” parciais específicas; mas o erro se repetia. Sugeri então a alguns professores fazer representações mímicas das cenas da ida e da volta, e de desenhar os vários momentos da excursão. Um caso interessante que encontrei e descrevi em D’Amore (1993) é aquele de uma criança que desenhou o seguinte cartaz:

Bolonha $\longrightarrow$ Verona
120 Km

Verona $\longrightarrow$ Bolonha
120 Km

Existe então total consciência do fato que numa excursão há ida e volta; mas depois a mesma criança, na ora de resolver, usa de novo só o dado da ida.

Uma das justificativas mais freqüentemente apresentadas pelas crianças nas entrevistas é que eles não se sentem autorizados a usar um dado que não aparece explicitamente no texto. Pouco importa o *sentido da solicitação* contida nos problemas de matemática, o que importa é usar os dados numéricos explicitamente propostos como tais. Uma das crianças na entrevista declarou: «Se você queria calcular também a volta, devia dizer»; é evidente a lacuna que a criança percebe: em nenhum dos dados parece lícito duplicar o gasto para o percurso quilométrico. O contrato didático impõe regras de comportamento e, como explicava Brousseau, as pressões didáticas se impõem sobre as a-didáticas.

Resulta muito interessante conhecer a atitude dos estudantes ao enfrentar o seguinte célebre problema de Alan Schoenfeld (1987):

«Um ônibus do exército transporta 36 soldados. Se 1128 soldados têm que ser transportados de ônibus para o campo de treinamento, quantos ônibus têm que ser utilizados?».

Dos 45000 alunos de quinze anos testados nos Estados Unidos por Schoenfeld, apenas menos de um quarto (23%) conseguiu dar a resposta esperada, ou seja, 32. O pesquisador norte americano afirma então que pouquíssimos estudantes são capazes de reler o sentido da pergunta, ousando escrever 32, que não foi obtido formalmente na operação, e propõe como causa desse comportamento questões ligadas a fatos metacognitivos. A explicação desse evento, segundo o autor, está numa lacuna existente nos processos metacognitivos, consequentemente no fato que os alunos, depois de ter obtido o resultado numérico com um processo aritmético de resolução do problema, não são capazes de voltar sobre os próprios passos, reler criticamente o texto, tomar consciência da verdadeira solicitação, e interpretar o resultado obtido para dar a resposta correta.

Depois de alguns anos, quisemos recentemente analisar de novo a mesma situação (D'AMORE, MARTINI, 1997), entrevistando os alunos, o que não foi feito por Schoenfeld, e encontramos algumas novidades. A experiência foi feita em vários níveis escolares acrescentando uma variável, ou seja, deixando aos estudantes a liberdade de usar ou não a calculadora. Tivemos muitas respostas do tipo: 31,333333 sobretudo dos que usaram a calculadora; outras respostas foram: $31,\overline{3}$ e 31,3.

O controle semântico, quando presente, leva alguém a escrever 31 («não se pode quebrar os ônibus»), mas bem poucos se sentem *autorizados* a escrever 32. Entre quem usa a calculadora encontra-se 0% de respostas "32".

A entrevista mostra que o estudante não se sente autorizado a escrever o que não aparece: mesmo se faz um controle semântico sobre os ônibus como objetos indivisíveis, isso não o autoriza a escrever 32; há também quem não se sente autorizado a escrever nem mesmo 31; não é possível simplesmente falar de "erro" por parte do estudante, a menos que se entenda por erro a incapacidade de verificar, depois de obtida uma resposta, se ela é semanticamente coerente com a pergunta; mas então, ativa-se outro mecanismo: o estudante não está disposto a admitir de ter errado e prefere falar de "truque", de "armadilha"; para o estudante um erro matemático ou em matemática é um erro de cálculo ou algo parecido, e não aceita que se considere erro uma interpretação semântica errada.

Um estudo longo e sistemático sobre essa experiência revela, também por meio de muitas entrevistas com os estudantes, que "a culpada" por este comportamento é uma cláusula do contrato didático, que denominamos "cláusula de delegação formal". O estudante lê o texto, decide a operação a efetuar e os números com os quais tem que operar; neste ponto dispara então a cláusula de *delegação formal*: não cabe mais a ele raciocinar e verificar, não considera mais sua responsabilidade pessoal o que se segue. Tanto se fizer os cálculos a mão, e *mais ainda* se usar a calculadora, instaura-se essa cláusula que desempenha as faculdades racionais, críticas, de controle: o empenho do estudante acabou e agora é o algoritmo, ou melhor, a máquina, que tem que trabalhar para ele. A tarefa sucessiva do estudante será a de transcrever o resultado, qualquer que seja ele e não importa o que ele signifique no contexto problemático do início.

Esse fato explica também outro evento didático. É bem conhecido o exemplo de Efraim Fischbein (1985):

P1. Uma garrafa de suco de laranja que contém 0,75 *l* custa 2 dólares. Qual é o preço de 1 *l*?

P2. Uma garrafa de suco de laranja que contém 2 *l* custa 6 dólares. Qual é o preço de 1 *l*?

Dando para resolver só P1, escondendo P2, notar-se-á sempre entre os presentes um tempo de desconforto mais ou menos demorado. Dando logo depois também P2, muitos estarão dispostos a admitir com sinceridade que, enquanto o segundo problema se resolve imediatamente com a divisão 6:2, resolver o primeiro com a divisão *análoga* 2:0,75 gera grande desconforto.

Vejamos o comentário do próprio Fischbein (1985): «Em conseqüência podemos supôr que sejam justamente os números e as relações entre eles a bloquear ou facilitar o reconhecimento da operação de divisão como procedimento de resolução. Cada operação aritmética possui, além do seu *significado formal*, também um ou mais *significados intuitivos.* Os dois níveis podem coincidir ou não».

[Uma análise muito profunda destes e de muitos outros casos análogos encontra-se em D'Amore (1999, 2003). Por isso aqui não comento ulteriormente o assunto].

Muitas vezes perguntei aos professores e aos estudantes mais maduros como teriam resolvido P1. Alguns deles confessaram ter considerado 0,75 como ¾ e ter então trabalhado no campo das frações (não sempre de maneira incriticável). Outros admitiram ter resolvido P1 com a proporção 0,75:2=1:x e de ter depois aplicado as propriedades conhecidas para resolver (com sucesso). Agora, observe-se bem que, no decorrer da resolução dessa equação linear na incógnita x, há um momento em que *é preciso* fazer 2:0,75, ou seja, a aparentemente mesma operação que, se efetuada diretamente nos dados do problema teria resolvido P1 rapidamente. Mas não é a mesma coisa. Se for verdade, como claramente é, que há forte resistência em muitos dentre nós em fazer diretamente 2:0,75 (devido ao contraste entre significado formal e significado intuitivo da divisão), por outro lado não há desconforto algum em aplicar as regras das proporções e executar as *passagens de um algoritmo,* mesmo quando este requer ao final a *aparentemente mesma* operação. Aqui, como já sabemos, ativa-se uma cláusula do contrato didático, a de *delegação formal*: em certo sentido não nos empenhamos mais diretamente em realizar aquela passagem, não é mais uma questão de escolha, de decisão pessoal; entrega-se ao algoritmo, ao cálculo, a resolução do problema, numa espécie de desresponsabilização.[13]

Durante uma experiência sobre as capacidades dos alunos em encontrar as soluções das equações de segundo grau, o professor propôs, entre outras, a equação (x-1)(x-3)=0. Nunca havia acontecido: as equações nunca haviam sido dadas na forma de produto de binômios, mas somente em sua forma canônica. Na totalidade, a turma interpretou a tarefa como uma compressão determinada das condições didáticas que têm o objetivo de levar à produção da resposta esperada, independentemente das modalidades de produção. Então, em vez de responder imediatamente +1 e +3, multiplicaram os dois binômios chegando à equação na forma canônica habitual, e fornecendo só então as duas raízes esperadas +1 e +3. [Obviamente, vários erraram os cálculos, produzindo raízes diferentes]. Esse comportamento, não é preciso insistir, explica-se muito bem com o contrato didático.

[13] Sobre este tema existe um trabalho do Brousseau (1987); numa tá bua a página 59, o autor analisa o problema seguinte: Imaginamos que tem que pagar 0,2 esterlinas para 0,75 litros. Afirma Brousseau que a divisão 0,2:0,75 resulta mais surpreendente do que a 2:0,75.

Conclusão

Não gostaria de ter dado a idéia de que o contrato didático tenha ação em sala de aula apenas sobre alunos jovens e nos níveis iniciais da escolarização; há muitos exemplos nos níveis mais altos, até mesmo na universidade e inclusive nos cursos para professores de matemática, em formação inicial ou em serviço (FANDIÑO PINILLA, 2005; FANDIÑO PINILLA, D'AMORE, 2006). Trata-se, portanto, de um instrumento poderoso para analisar os eventos de sala de aula, um dos muitos com os quais fomos presenteados pelo estudo apaixonado de várias décadas de Guy Brousseau, sem dúvida o pioneiro neste campo.

Com relação às suas idéias iniciais, que evoluíram no tempo, muitos pesquisadores se empenharam em encontrar exemplos e explorar sempre mais profundamente o conceito; entretanto, dessa maneira, vários autores acabaram interpretando de muitas maneiras diferentes a idéia original (SARRAZY, 1996).

Isso não limita, a meu ver, a capacidade do instrumento, pelo contrário, a amplifica, mostrando, com um exemplo flexível e poderoso, a força dos estudos que transformaram nossa comunidade nos últimos 40 anos.

Referências

BACHELARD, G. **La formation de l'esprit scientifique:** contribution à une psychanalyse de la connaissance objective. Paris: Vrin, 1938.

BROUSSEAU, G. **Les mathématiques du cours préparatoire.** Paris: Dunod, 1965.

______. Représentations et didactique du sens de la division. In: VERGNAUD, G. ; BROUSSEAU, G. ; HULIN, M. (Ed.) **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres.** Grénoble: La Pensée Sauvage, 1987. p. 47-67.

______. Epistemologia e didattica della matematica. **La matematica e la sua Didattica,** Bologna, n. 4, p. 621-655, 2006a.

______. Epistemologia e formazione degli insegnanti. In: SBARAGLI, S. (Ed.) **La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno**: Atti del Convegno internazionale omonimo: Castel San Pietro Terme, 23 settembre 2006. Bologna: Pitagora, 2006b. p. 54-

58. Publicado também em: D'AMORE, B. (Ed.) Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione. Número especial monotemático de **Rassegna,** v. 29, p. 29-33, 2006.

CHEVALLARD, Y. **Sur l'analyse didactique**: deux études sur les notions de contrat et de situation. Marseille: IREM, 1988. (Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 14).

COMENIUS, J. A. [Komenský J.A.] **Didáctica magna**. Amsterdam, 1657. Veja-se a edição: VON FLITNER, A. (Ed.) **Die große Didaktik**. Düsseldorf: Helmut Küpper, 1966.

D'AMORE, B. **Problemi**: pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving. Milano: Angeli, 1993. (Progetto Ma.S.E., v. XA). Em língua espanhola: Madrid: Editorial Sintesis, 1997, trad. di F. Vecino Rubio. Existe uma edição mais atualizada sobre a mesma temática: D'AMORE, B. **Problemi di matematica nella scuola primaria.** Bologna: Pitagora, 2003.

______. **Elementi di didattica della matematica**. Bologna: Pitagora, 1999. Edição em língua espanhola com acréscimos e atualizações: D'AMORE, B.**Didáctica de la matemática.** Bogotá: Magistério, 2006. Edição em língua portuguesa: em curso.

______. **Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.** Bologna: Pitagora, 2003. Edição em língua espanhola: D'AMORE, B. **Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática.** Barcelona: Reverté – Cinvestav, 2005. Edição em língua portuguesa: D'AMORE, B. Epistemologia e didática da matemática. São Paulo: Escrituras, 2005.

______. Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. **La Matematica e la sua Didattica,** Bologna, v. 4, p. 4-30, 2004. Na língua espanhola: El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria. **Epsilon,** Sevilla, v. 20, n. 60, p. 413-434, 2004.

______. Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. **La Matematica e la sua Didattica,** Bologna, v. 3, p. 325-336, 2005.

______; FANDIÑO PINILLA, M. I. Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". **Educación Matemática,** México, DF, v. 14, n. 1, p. 48-61, 2002.

______; ______. Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. **La matematica e la sua didattica,** Bologna, v. 3, p. 27-50, 2004. Em língua espanhola: Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. **Epsilon**, Sevilla, v. 20, n. 58, p. 25-43, 2004.

______ ; GODINO, D. J. Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. **La matematica e la sua didattica**, Bologna, v. 1, p. 9-38, 2006.

______; GODINO, D. J.; ARRIGO, G., FANDIÑO PINILLA, M. I. **Competenze in matematica**. Bologna: Pitagora, 2003.

______ ; MARTINI, B. Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. **La Matematica e la sua Didattica,** Bologna, n. 2, p. 150-175, 1997. Em língua espanhola: **Números**, v. 32, p. 26-32, 1997. Em língua francesa: **Scientia Paedagogica Experimentalis**, v. 35, n.1, p. 95-118. Em língua inglesa in: GAGATSIS, A. (Ed.) **A multidimensional approach to learning in mathematics and science**. Nicosia: Intercollege, 1999. p. 3-24.

______ ; SANDRI, P. Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. **La Matematica e la sua Didattica,** Bologna, v. 1, p. 4-18, 1998. Em língua francesa: **Scientia Paedagogica Experimentalis. Centre for Experimental Educational Research,** Gent, v. 35, n. 1, p. 55-94, 1998.

FANDIÑO PINILLA, M. I. **Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.** Bologna: Pitagora, 2005.

______ ; D'Amore, B. **Area e perimetro, aspetti concettuali e didattici**. Trento:Erickson, 2006.

FISCHBEIN, E. Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: CHINI ARTUSI, L. (Ed.) **Numeri e operazioni nella scuola di base**. Bologna: Zanichelli-UMI, 1985. p. 122-132.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Revue française de pédagogie**, v. 12, p. 85-118, 1995. Em língua italiana: **La Matematica e la sua Didattica,** Bologna, v. 2, p. 132-175, 1998.

______. **La sensibilité au contrat didactique:** rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois. 1996. Tese (Doutorado) - Universidade de Bordeaux II.

SCHOENFELD, A. H. What's all the fuss about metacognition? In: ______. (Ed.) **Cognitive science and mathematics education.** Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 189-215.

SPERANZA, F. **Scritti di epistemologia della matematica**. Bologna: Pitagora, 1997.

Apêndice

Neste apêndice, estão vários trabalhos pioneiros de Guy Brousseau, eventualmente não citados de maneira explícita no artigo. Vários deles são hoje muito difíceis de encontrar. Considero o meu, como uma modesta contribuição à reconstrução histórica temática, uma homenagem ao pesquisador francês.[14]

BROUSSEAU, G. Les processus de mathématisation. **Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public**, Paris, p. 428-457, 1972. Numéro Spécial : La mathématique à l'école élémentaire.

______. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: RENCONTRE DE LA C.I.E.A.E.M., 28., Louvain la neuve, 1976. **Comptes Rendus.** p. 101-117. Republicado em: **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983. Disponível em: http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=12303975 Acesso em: 20 nov. 2003.

______. Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. **Revue de Laryngologie de Otologie et de Rhinologie,** Paris, v. 101, n. 3/4, p. 107-131, 1980.

______. L'échec et le contrat. **Recherches en Didactique dês Mathématiques**, Grenoble, v. 41, p. 177-182, 1980.

______. Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 2, n. 3, p. 37-127, 1981. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_decimaux_RDM_1981_2.1.pdf Acesso em: 20 nov. 2006.

______. **À propos d'ingénierie didactique**. Bordeaux: L´Université de Bordeaux I, 1982. Datilografado.

______. **Théorisation des phenomenes d'enseignements des mathématiques**. 1983. Thèse (Docteur d'Etat Mathématiques) - Faculté des Sciences de Bordeaux, Bordeaux, 1983.

______. The crucial role of the didactical contract. In: CONGRÈS DE L'ICME À ADELAIDE, 5., Adelaide, 1984. **Proceedings of the Theory of Mathematic Education - T.M.E. 54**.

______. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

[14] Mais informações sobre a obra de Brousseau podem ser obtidas em http://math.unipa.it/~grim/homebrousseau.htm (N. E.)

______. Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. **Petit x**, Grenoble, n. 21, p. 46-68, 1988. Disponível em: http://publimath.irem.univmrs.fr/bibliocomp/IGR01127.htm Acesso em: 20 nov. 2006.

______. **La tour de Babel**: études en didactique des mathématiques. Bourdeaux: IREM de Bordeaux, 1989. Article occasionnel n. 2.

______. Obstacles épistémologiques, conflicts socio-cognitifs et ingéniérie didactique. In: BODNARZ, N., GARNIER, C. (Ed.) **Les obstacles** épistémologiques et le conflit socio-cognitif. Construction des savoirs **(obstacles et conflits).** Québec : Université de Québec, 1989. p. 277-285. Colloque Internationale CIRADE.

______. L'enjeu dans une situation didactique. Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Paris: IREM de Paris, 1991. v. 7, p. 147-163.

______. Perspectives pour la didactique des mathématiques. In: ARTIGUE, M., GRAS, R., LABORDE, C., TAVIGNOT, P. (Ed.) **Vingt ans de didactique des mathématiques en France:** hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994. p. 51-66. Extraits publiés dans **Animation et Education**, Paris, n. 123, nov./déc., 1994.

______. L'insegnamento di un modello dello spazio. In: GALLO E.; FERRARI, M.; SPERANZA, F. (Ed.) **La ricerca in didattica della matematica**: finalità, contenuti, esempi. Ravello: CNR, 1995. (Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, 15).

______ ; BROUSSEAU, N. **Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire**. Bordeaux: L´Université de Bordeaux I, IREM, 1987.

______; CENTENO, J. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 11, n. 2/3, p. 167-210, 1991.

______; WARFIELD, V.; PERES, J. **Le cas Gaël**. Bordeaux: L´Université de Bordeaux I, IREM, 1981. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/Gael_broussea_fr.pdf Acesso em: 20 nov. 2007. Article publié en anglais in **Journal of Mathematical Behavior**, New York, v. 18, n. 1, p. 1-46, octobre, 1999. Non encore publié em Français.

______. Les représentations: étude en théorie des situations. **Revue des Sciences de l'Éducation**, Montreal, v. 30, n. 2, 2004. Disponível em: http://www.erudit.org/revue/RSE/2004/v30/n2/012669ar.html Acesso em: 20 nov. 2006.

Há diversos artigos publicados pelo *Institut de Recherche sur l' Enseignement des Mathématiques* (I. R. E. M.) de Bordeaux nos anos '70. Entre eles, destaco o *Colloque l'Analyse de la Didactique des Mathematiques* (13-15 de março de 1975) e o *Compte-Rendu du Seminaire de Recherches 1971-72 et Projets pour 1972-73* , este último foi republicado em Barcelona em 1977 sob o número 18.

Aprovado em junho de 2007
Submetido em abril de 2007