Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 55 a 78

As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo

Operations with Rational Numbers and their Meanings based on the Part-all Conception

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva[1]
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud[2]

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma reflexão a respeito das operações com números fracionários focalizando a concepção parte-todo por meio de algumas atividades que possam contribuir para a prática docente na escola básica. O estudo explicita uma breve caracterização da concepção parte-todo e atividades envolvendo as quatro operações fundamentais tratadas em figuras planas, embora outras concepções possam ser mobilizadas durante a solução. Restringimos nossas considerações a essa concepção visto ser a mais freqüente, tanto em livros didáticos, quanto na prática do professor, embora não seja utilizada para justificar as regras operatórias dos números fracionários.

Palavras-chave: Frações. Números Fracionários. Operações.

Abstract

We present a reflection regarding operations with fractional numbers focusing on the part-all conception through some activities that can contribute to teaching practices at the elementary school level. A brief characterization of the all-part conception is provided along with descriptions of activities involving the four basic operations based on the use of flat figures, although other conceptions may emerge during the solution. We limit

[1] Professora da Graduação e do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. zeze@pucsp.br – Rua Marques de Paranaguá, 111 – São Paulo, SP, 01303-050.
[2] Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. saddoag@pucsp.br – Rua Marques de Paranaguá, 111 – São Paulo, SP, 01303-050.

our considerations to this conception because it is the most frequent, in textbooks as well as teacher practice, although it is not used to justify operational rules of fractional numbers.

Key-words: Fractions. Fractional Numbers. Operations.

Introdução

A abordagem formal-lógico-dedutiva apresentada nas licenciaturas em Matemática é, muitas vezes, insuficiente e inadequada para a sistematização da Matemática escolar, de acordo com Moreira e David (2004). Para os autores destacados é como se escondesse "uma variedade imensa de idéias matemáticas em alguns enunciados formais" (p. 16). Assim considerando, eles sugerem que novos estudos tentem compreender as relações entre Matemática científica e Matemática escolar e seus papéis na prática docente escolar.

Analisando os números racionais em três momentos da História da Matemática escolar brasileira, Gomes (2006, p. 38) mostra que nas três primeiras décadas do século passado, a conceituação de número, nos livros didáticos, era fundamentada na medição de uma grandeza expressa por um número inteiro ou fracionário, chamado "preferencialmente de número comensurável". No segundo momento, entre 1931 até o início dos anos de 1960, os livros continuam a conceituar número como resultado da medição de uma grandeza, porém sem utilizar a denominação de "números comensuráveis", sendo a fração considerada como "uma ou mais das partes iguais em que se divide a unidade" (*ibid*, p. 38), que nem sempre é um segmento de reta. A autora observa, ainda, "tanto a ausência de uma definição para os números racionais quanto à inexistência dessa denominação em quase todos os livros analisados" (*ibid*, p. 38). Finalmente, no terceiro momento, dos anos de 1960 ao início dos anos de 1970, desaparece a noção de grandeza e a idéia de fração é apresentada por meio de uma abordagem formal, diferente daquela do primeiro momento. Nesta fase, a fração $\frac{a}{b}$ é enfatizada pelo par ordenado de inteiros a e b, com b diferente de zero.

Trabalhando com a formação continuada de um grupo de professores do ensino básico, Silva (2005) mostrou, em sua pesquisa, a falta de autonomia desse grupo em elaborar atividades para o ensino dos números fracionários[3], que efetivamente colocassem os alunos em situações de ação, para a construção do próprio conhecimento. Os professores privilegiaram a idéia de fração como parte-todo e se inibiram no tratamento desta a partir de outros pontos de vista tratados por Silva (2005), como concepções baseadas na classificação de Behr *et al* (1983), que constroem o conceito de número racional com base nas interpretações: parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Enquanto para Kieren (1988), o domínio matemático dos números racionais é construído com base em uma visão integrada das concepções: medida, quociente, operador e razão, além das relações entre elas. Para o autor, o modelo parte-todo auxilia, convenientemente, na produção da linguagem fracionária, quando os textos de matemática escolares e o discurso do professor tendem a orientar o estudante a uma imagem de dupla contagem: contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e contar as partes que serão consideradas (numerador). Embora esse procedimento capacite a criança para produzir respostas corretas em algumas situações, desenvolve um modelo mental não apropriado (partes de um inteiro) em lugar de um mais poderoso, como o proporcionado pela concepção de medida (comparação com a unidade) como sugerido por Vergnaud (1983, *apud* KIEREN, 1988).

Mediante o exposto, focaremos neste artigo, a possibilidade do tratamento das operações com números fracionários a partir de representações de figuras planas, mobilizando a concepção parte-todo. Para tal, faremos uma breve caracterização dessa concepção e, a seguir, trataremos das quatro operações fundamentais segundo esse ponto de vista. As atividades que apresentaremos resultam de várias formações de professores em projetos do qual participamos e se mostraram eficientes. Não discutiremos essas formações continuadas neste artigo.

---

3 Trataremos por números fracionários, neste trabalho, todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações, considerando estas uma forma de escrita para números.

A concepção parte-todo

Essa concepção se caracteriza por um inteiro (grandeza discreta ou contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro. Convenciona-se então que ele deva estar dividido em partes "iguais" (mesma área) para que a parte em questão possa ser quantificada.

O procedimento mais comum é a apresentação de uma figura plana dividida em partes congruentes com algumas selecionadas. Em seguida, se faz a contagem destas partes, de modo que uma fração seja associada às partes selecionadas da figura. Tal procedimento se aplica tanto para grandezas contínuas, quanto para grandezas discretas como mostra a figura 1.

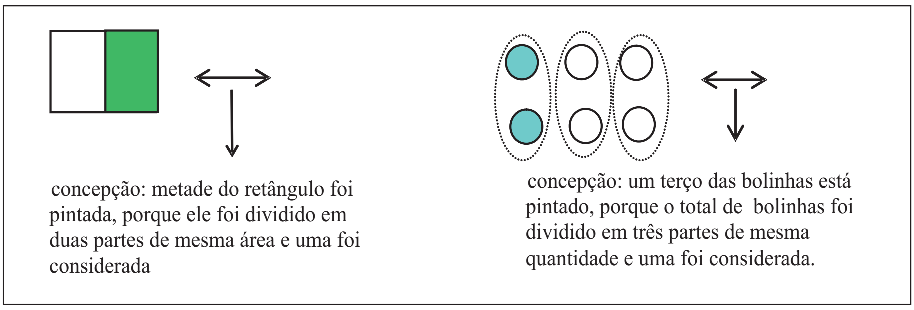


Figura 1: representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo no contínuo e no discreto

No entanto, sabemos que qualquer que seja a parte considerada de uma figura pode-se associar a ela, mesmo que aproximadamente, um número fracionário, independente de ela estar totalmente dividida em partes congruentes. Na figura 2, apresentamos exemplos desse tipo, que mostram algumas possibilidades de figuras que podem ser utilizadas para sugerir ao aluno a compreensão de que estamos trabalhando com a área da figura e, por isso, nem sempre a contagem das partes conduz a quantificação correta.

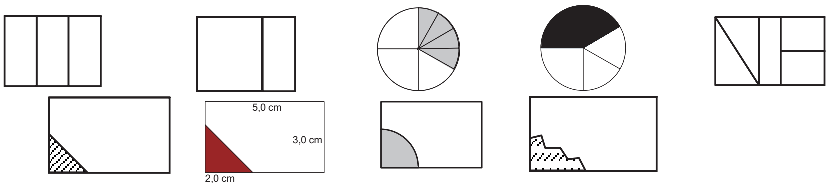


Figura 2: figuras que solicitam a mobilização da concepção parte-todo

Comumente, o ensino utiliza e prioriza o trabalho com a concepção parte-todo baseado, principalmente, em figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos, polígonos e círculos, sendo, por isso, natural o uso dessas figuras para a compreensão das regras operatórias com números fracionários. No entanto, um primeiro ponto que deve ser considerado é a impossibilidade de o resultado ser maior que um inteiro, pois, se para a fração 2/3, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes, de mesma área ou "iguais", das quais duas estão sendo consideradas, como explicar a fração 5/3? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três?

Dessa forma, acreditamos que, para situações que envolvam mais do que um inteiro, as concepções de medida e quociente se mostram boas alternativas. No primeiro caso, utilizando a reta numerada e, no segundo, situações de distribuição, embora em ambos os casos possamos mobilizar também a concepção parte-todo.

É com base nesses aspectos que trataremos aqui da possibilidade de dar ao aluno algum significado para as regras operatórias com números fracionários a partir da utilização de figuras e da mobilização de outras concepções de fracionários que não só a de parte-todo. Não estamos, com isso, afirmando que só a quantidade e os tipos de atividades aqui apresentados são suficientes para a total compreensão dos alunos sobre o assunto.

Adição e subtração

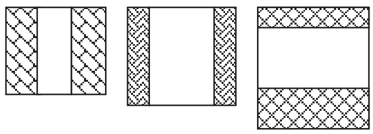
A adição de números fracionários de mesmo denominador, normalmente, não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário transformar as frações em questão, em outras equivalentes, que tenham mesmo nome, ou seja, que apresentem mesmo denominador. O próprio termo já mostra sua função, o denominador denomina, dá nome às partes em que o inteiro foi dividido.

Assim, comentaremos algumas atividades que podem ser associadas à adição de frações que consideramos significativas para essa operação. Esclarecemos ainda que apresentamos algumas sugestões e não uma seqüência de ensino completa para aplicação em sala de aula.

a) Frações com mesmo denominador

Atividade 1

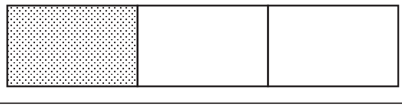
Determine a parte que está pintada das figuras e a represente como soma das frações que representa cada uma das partes pintadas.



Para identificar o número fracionário que pode ser associado a cada uma das figuras, a contagem simples é satisfatória apenas para a primeira, porque o inteiro está dividido em partes congruentes, das quais duas estão sendo consideradas. Assim o número $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ responde a questão. Nas outras é necessário a utilização de uma régua para nomear as partes que estão pintadas. Na segunda figura, com a utilização da régua, percebe-se que o inteiro foi dividido em cinco partes e delas duas foram pintadas o que resulta em $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Da mesma forma, na terceira percebe-se que o inteiro foi dividido em seis partes das quais três foram pintadas e, por isso, $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$.

Atividade 2

Se apagássemos $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo abaixo, que parte desse retângulo permaneceria pintada? Dê a sentença matemática que representa o que você fez.



Neste caso, também se utiliza a régua para dividir a parte pintada da figura em quatro partes de mesma área. Observando que cada uma delas corresponde a 1/12 do retângulo, pode-se concluir que $\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}$ e ainda, que esse resultado corresponde a 1/4 desse retângulo, conforme mostra a figura 3.

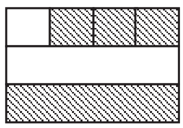
Figura 3: figura da solução da atividade dois

b) Frações com denominadores diferentes

No caso em que as frações têm denominadores diferentes é comum utilizar o mínimo múltiplo comum (mmc) para transformar as frações em outras equivalentes e de mesmo denominador. No entanto, acreditamos que tal procedimento prejudica a compreensão da definição da operação de adição. Assim, o objetivo das atividades 3, 4 e 5 é encaminhar o aluno para que ele perceba que o produto dos denominadores é uma boa opção para a transformação em frações equivalentes e para a compreensão das regras para essa operação.

Atividade 3

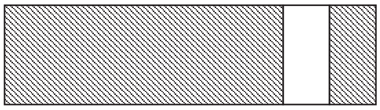
Identifique a parte pintada da figura ao lado por uma fração e a represente por uma soma de frações.



Neste caso, basta re-dividir a figura ou perceber mentalmente, que o retângulo pode ser dividido em 12 partes congruentes aos "quadradinhos" pintados. Com isso, uma das partes pintadas pode ser representada por 3/12 e a outra, que corresponde a 1/3, é equivalente a 4/12. Assim, a parte pintada da figura pode ser representada pela soma: $\frac{1}{3}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$.

Atividade 4

a) Identifique as frações que representam as partes pintadas do retângulo. A seguir determine a fração que representa a parte pintada do retângulo.



b) Calcule $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$.

Com a utilização de uma régua, percebe-se que 3/4 e 1/8 do retângulo estão pintados e que é possível dividir o retângulo de forma a obter frações equivalentes a essas de mesmo nome. Com isso, pode-se concluir que toda a parte pintada do retângulo corresponde a 7/8 e que as ações feitas na figura podem ser registradas como: $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Nessa atividade, pode-se explorar também, que a metade de 1/4 é 1/8, ou seja $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Atividade 5

Pinte a parte do retângulo abaixo, que representa a soma $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$.

Depois de identificar as partes correspondentes a 1/3 e 2/5 na figura, o procedimento para obter a resposta é semelhante ao da atividade anterior. Temos que renomear essas partes, transformando-as em equivalentes com mesmo denominador fazendo uma nova divisão das partes pintadas, como mostra a figura 4. O registro simbólico das ações sobre a figura é: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$.

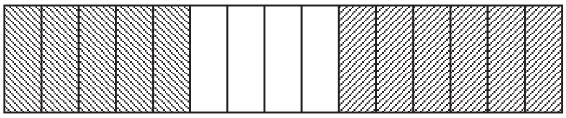


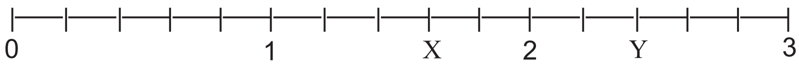
Figura 4: solução da atividade quatro

c) Somas maiores que a unidade

Para o trabalho com somas maiores que a unidade, uma possibilidade é associar a concepção parte-todo à concepção de medida, utilizando figuras de retas, ou segmentos numerados.

Atividade 6

Qual a distância de 0 à X? E de X à Y?



Embora esta atividade não peça diretamente uma adição de números fracionários podemos associar à primeira questão o registro: $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}$; para a segunda, o registro possível é: $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$. Esses esquemas de medida são importantes para trabalhar a ordenação de números fracionários que, mais tarde, poderá auxiliar a conceituação dos números racionais.

Atividade 7

Representе, na reta numerada abaixo, dois inteiros, cada um deles dividido em dez partes de mesma medida. A seguir pinte $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$ e dê a resposta por meio de uma sentença matemática.

A partir de zero, deve-se medir e marcar os dois inteiros solicitados. A seguir, pintar oito das partes para representar 4/5 e mais cinco partes para representar 1/2; e concluir que foi pintado $1\frac{3}{10}$. A sentença matemática, que na realidade, compreende a representação simbólica das ações realizadas é a seguinte: $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{8}{10}+\frac{5}{10}=\frac{13}{10}=1\frac{3}{10}$. A fração maior que a unidade e sua forma mista de representação, em contextos de medida, surgem de maneira natural da ação de resolução da atividade e por isso são facilitadoras para a compreensão do aluno.

Atividade 8 Represente em uma reta numérica a soma $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$ e dê a resposta por meio de uma sentença matemática.

A compreensão de que o produto dos denominadores é uma boa opção para a transformação em frações equivalentes, ajuda o aluno a entender que os inteiros podem ser divididos em oito ou quatro partes de mesma medida. Dependendo dessa opção pode-se determinar as sentenças matemáticas: $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{12}{8}+\frac{6}{8}=\frac{18}{8}=2\frac{2}{8}=2\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ respectivamente.

Atividade 9 Escreva uma regra para a adição de duas frações quaisquer.

Acreditamos que as atividades dos tipos apresentados facilitam a compreensão da regra operatória da adição de números fracionários, embora não pretendamos dizer que apenas essas atividades sejam suficientes para proporcionar o aprendizado desejado; outras atividades podem ser desenvolvidas e, certamente, serão necessárias. O importante é o aluno compreender que para adicionar números fracionários, com denominadores diferentes, o produto destes é uma boa escolha para a transformação em frações equivalentes e, dessa forma, conseguir expressar uma regra que responda a atividade nove.

Dependendo da faixa etária, essa atividade poderia ser respondida por uma descrição dos passos utilizados pelo aluno, ou ser generalizada: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, sem que o mínimo múltiplo comum entre os denominadores seja citado. Entendemos que esse procedimento auxilia o aluno a construir um significado para a operação de adição com números fracionários, além da compreensão do algoritmo que se utiliza para realizá-la, pois já sabemos que, geralmente, o aluno não tem uma compreensão clara do papel do mínimo múltiplo comum nesse tipo de cálculo.

Multiplicação

Para a multiplicação com números fracionários podemos associar a concepção parte-todo às concepções de operador e de medida, fazendo analogias com as operações com os números naturais, já conhecidas pelos alunos. A respeito do assunto, Behr *et al* (1992) acreditam que a multiplicação de números racionais pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros, a partir de situações que pedem para que seja encontrada a parte de uma parte como, por exemplo, a metade de um quinto.

Atividade 1

Represente, por uma figura a expressão $2\times\frac{1}{5}$ e seu resultado.

Em um primeiro momento, fazendo uma analogia à representação da multiplicação com números naturais, os alunos podem perceber que, da mesma forma que se representa "o dobro de 5" por 2×5, "o dobro de 1/5" pode ser representado por $2\times\frac{1}{5}$. Essa representação pode ser compreendida, mais claramente, com o auxilio de representações figurais que solicitem a mobilização da concepção parte-todo e de medida, como as que mostram a figura 5, em que se tem $2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

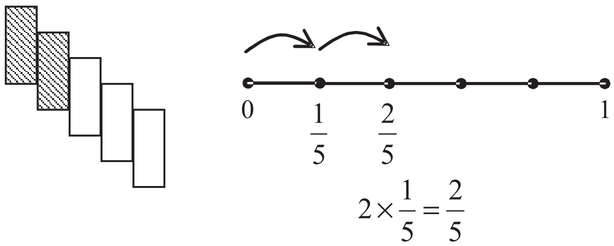


Figura 5: possíveis soluções para a atividade 1 de multiplicação

Atividade 2

Dê a expressão matemática e calcule:

a) o dobro de $\frac{2}{3}$

b) o triplo de $\frac{2}{5}$

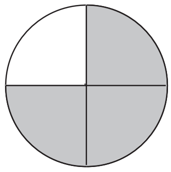
c) o quádruplo de $\frac{1}{5}$

d) o quíntuplo de $\frac{3}{7}$

A realização desta atividade pode ser auxiliada por uma representação da reta numérica e do conhecimento que o aluno possui dos números naturais. Podemos entender que o aluno utiliza conhecimentos prévios para iniciar a construção de um novo campo numérico e, provavelmente, não apresenta dificuldade em representar as sentenças matemáticas solicitadas com os seguintes registros: $2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, $3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$, $4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ e $5\times\frac{3}{7}=\frac{15}{7}$.

Atividade 3

Pinte a metade (1/2) da parte colorida do disco. Que fração do disco você pintou?



A concepção parte-todo está sendo mobilizada na figura apresentada, na divisão solicitada da parte do disco que já está pintada e ainda na percepção de que a parte que foi pintada corresponde a 3/8 do disco. O registro simbólico das ações de divisão e identificação da parte pintada fica, no final, assim:

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

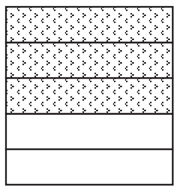
Atividade 4

Pinte a metade de um quinto do segmento abaixo e determine a fração que representa a parte pintada do segmento.

A ação de um operador fracionário, sobre um inteiro ou unidade, confunde-se, muitas vezes com a concepção parte-todo de fracionários. Para resolver essa atividade é necessário associar a concepção parte-todo à de medida, para dividir o segmento em cinco partes iguais (de mesmo comprimento). E ainda, para dividir uma dessas partes em dois e concluir que a parte considerada corresponde a $\frac{1}{10}$. A ação para a resolução poderá ser associada à operação de multiplicação e à compreensão que o operador 1/2 atua sobre a fração 1/5 produzindo 1/10 e concluir, registrando: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Atividade 5

Pinte três quartos da parte que está hachurada na figura ao lado.
Que parte da figura você pintou?
Qual a sentença matemática que representa essa situação?



A atividade solicita a mobilização da concepção de medida e, consequentemente, da utilização de uma régua para a divisão do lado do retângulo, o que permitirá identificar os três quartos da região pintada.

Da mesma forma, a concepção parte-todo será mobilizada na compreensão da figura apresentada, na divisão da parte pintada do retângulo e, finalmente, na identificação da fração que soluciona o problema: $\frac{9}{20}$, conforme mostra a figura 6.

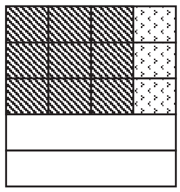
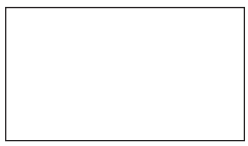


Figura 6: solução da atividade 6 de multiplicação

Por outro lado, a concepção de operador se apresenta na ação da fração 3/4 sobre a parte pintada da figura que representa 3/5 e auxilia na representação da sentença matemática: $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. Nesta atividade já dá para perceber a regra operatória para a multiplicação de racionais.

Atividade 6

Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou? Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou.



Para resolver a atividade o aluno pode, por exemplo, medir e dividir dois lados consecutivos do retângulo em quatro e cinco partes de mesmo comprimento. Em seguida, pintar a parte que corresponde a “três quartos de quatro quintos” mobilizando a concepção parte-todo e, provavelmente, a dupla contagem das partes.

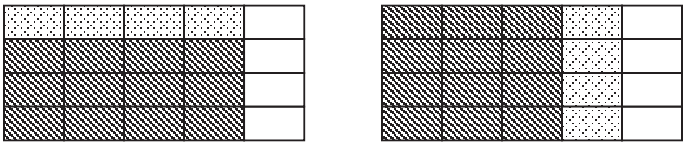


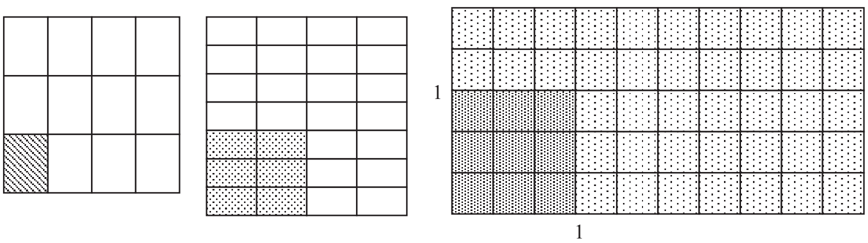
Figura 7: soluções para a atividade 6 de multiplicação

Finalmente, como mostra a figura 7, o aluno poderá registrar a ação executada pela seguinte sentença matemática: $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{20}$. A atividade mostra-se propícia tanto para a percepção da regra operatória para a multiplicação de números fracionários, quanto para a simplificação de frações quando se percebe que a figura obtida é equivalente a uma que representa 3/5 do retângulo, com o deslocamento de três dos retângulos pintados.

Atividade 7

Sabendo que a área de um retângulo é dada pela multiplicação das medidas da altura e da largura do retângulo, calcule a área da parte pintada das figuras abaixo.

a) b) c)



Na primeira figura, item (a), a parte do quadrado que está pintada é um retângulo com lados medindo 1/4 e 1/3 e, portanto, a medida de sua área é $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Por outro lado, mobilizando a concepção parte-todo e a dupla contagem das partes, vemos que o inteiro (quadrado de lado medindo uma unidade) foi dividido em doze partes congruentes e que uma delas está sendo considerada, o que significa que 1/12 do quadrado está pintado. Na segunda figura, item (b), da mesma forma que na anterior, a medida da área do retângulo pintado é dada por $\frac{3}{7}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{28}$ ou $\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$. Ou ainda, que o quadrado foi dividido em 28 partes congruentes das quais seis foram consideradas, que é o mesmo que considerar que o quadrado foi dividido em 14 partes e delas foram pintadas apenas três.

Para a terceira figura, item (c), utilizando a contagem, pode-se perceber que o inteiro considerado é um retângulo formado por 50 *quadradinhos*, mas a unidade de medida de área é um quadrado formado por nove deles. Assim, um quadradinho representa 1/9 da unidade de medida de área e os lados, do retângulo dado, medem 10/3 e 5/3, pois o lado de um *quadradinho* representa 1/3 da unidade de comprimento considerada. Dessa forma, o produto da medida da base pela medida da altura, do retângulo dado, é: $\frac{10}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{50}{9}$. Por outro lado, utilizando a *forma mista* de representação de frações maiores que o inteiro, pode-se dizer que o retângulo tem lados medindo $3\frac{1}{3}$ e $1\frac{2}{3}$, cuja área mede $3\frac{1}{3}\times1\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{50}{9}=5\frac{5}{9}$.

Atividade 8 Escreva uma regra para a multiplicação de números fracionários.

Depois de algumas atividades o aluno poderá explicitar a regra operatória para a multiplicação de números fracionários como sendo o produto dos numerados sobre o produto dos denominadores. Dependendo da faixa etária, a generalização: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ pode ser obtida.

Divisão

Das quatro operações a divisão é, com certeza, a que mais apresenta dificuldade para a compreensão dos alunos, desde o estudo com os números naturais. No entanto, acreditamos ser possível dar algum significado para a operação de divisão com números fracionários a partir da mobilização de conhecimentos anteriores, com a idéia de "quantos cabem" e de algumas propriedades já conhecidas para os números naturais.

Por outro lado, é necessário dar condições ao aluno para perceber que a regra operatória da divisão é semelhante à da multiplicação, substituindo multiplicação por divisão, obtendo-se quociente dos numeradores sobre o quociente dos denominadores: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$. Essa constatação poderá permitir uma maior agilidade no cálculo, posto que a transformação em frações equivalentes poderia ser utilizada privando o aluno da memorização de uma nova regra, multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda, que geralmente não tem significado para ele. A seguir, apresentamos algumas atividades que podem favorecer a aplicação das idéias expostas anteriormente.

Atividade 1

a) Quantas metades cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

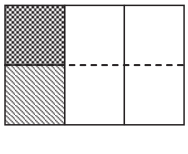
b) Quantos terços cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?

A partir de conhecimentos anteriores, o aluno percebe, na questão (a), que em um inteiro cabem duas metades e, que em um inteiro, cabem três terços. Na representação da situação surgem então as divisões: $1 \div \frac{1}{2} = 2$ e $1 \div \frac{1}{3} = 3$..

Atividade 2

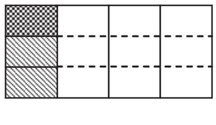
Observe os desenhos abaixo e complete:

a)



$\frac{1}{3} \div 2 =$

b)



$\frac{1}{4} \div 3 =$

Com ajuda das figuras e da dupla contagem das partes, pode-se perceber que $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$. Além disso, na realidade, na ação sobre a figura (a) buscamos *a metade de um terço*, cuja representação, vista anteriormente, é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. De maneira análoga, na figura (b), obtém-se $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$ e a busca de *um terço de um quarto* cuja representação é $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Neste caso, a fração sendo mobilizada como operador, dá sentido à divisão efetuada e, também, associa a divisão à multiplicação; no entanto, este enfoque foge da orientação usual, da inversão da segunda fração, isto é, $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$. Assim, é conveniente mostrar a equivalência entre uma situação e outra, isto é, mostrar que $\frac{1}{3} \div 2$ resulta no mesmo que $\frac{1}{2} \div 3$ e que $\frac{1}{4} \div 3$ é o mesmo que encontrar $\frac{1}{3} \div 4$, como mostra a figura 8. Outras situações como: $\frac{3}{5} \div 2 =$, $\frac{5}{7} \div 4 =$ e $\frac{5}{8} \div 7 =$, podem favorecer a compreensão do procedimento desenvolvido.

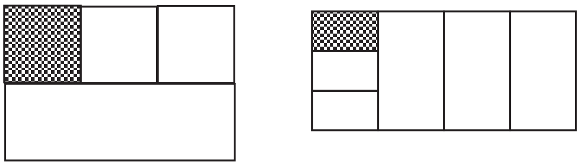
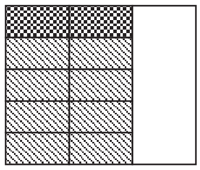


Figura 8: outro ponto de vista para a atividade 3 de divisão

Atividade 3

Observe os desenhos abaixo e responda:



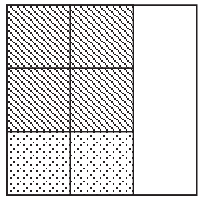
Se um quinto de dois terços é $\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=$

Então podemos escrever que:

$\frac{2}{15}\div\frac{1}{5}=$

e

$\frac{2}{15}\div\frac{2}{3}=$



Se um terço da metade é $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=$

Então podemos escrever que

$\frac{2}{9}\div\frac{1}{3}=$

e

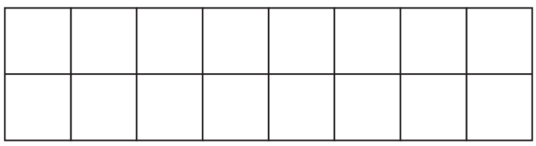
$\frac{2}{9}\div\frac{2}{3}=$

Utilizando conhecimentos anteriores, de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, como se define com os números naturais, podemos sugerir que os alunos a apliquem no caso dos fracionários, ou seja, se $\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ então $\frac{2}{15}\div\frac{1}{5}=\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{15}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$.

Alguns alunos podem perceber que o *produto em cruz* pode nos dar a solução e que esta é equivalente ao produto do primeiro fracionário pelo inverso do segundo. Isto é: $\frac{2}{15}\div\frac{1}{5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{15}\div\frac{2}{3}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$. É importante que o educador tome as devidas precauções para que ele não confunda este procedimento com o utilizado no tratamento de proporções.

Atividade 4

Quantos oitavos cabem em $\frac{1}{16}$? Dê a expressão matemática que representa a situação. Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.



A figura proporciona condições para observar que em 1/16 cabe a metade de 1/8 e por isso a resposta procurada é 1/2. A sentença matemática ficaria então $\frac{1}{16} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Percebe-se que nesta atividade nem $8 \times \frac{1}{16}$, nem $\frac{1}{16} \times 8$ fazem sentido, mas cabe a regra de *divisão dos numeradores e divisão dos denominadores*.

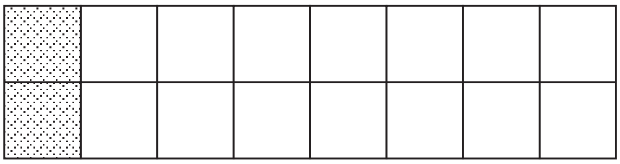


Figura 9: solução da atividade 4 de divisão

Atividade 5

Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$? Utilize a figura abaixo para ajudar na solução.

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$

Com o auxilio da figura, percebe-se que 1/3 cabe *uma vez e meia* na metade do retângulo, isto é 3/2, como podemos ver na figura 11. Logo conclui-se que $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

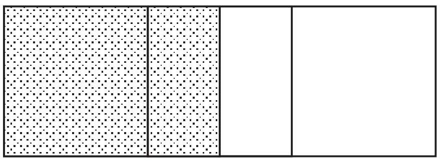


Figura 10: figura da solução da atividade 5 de divisão

Surge, então, uma dificuldade, porque até agora utilizamos figuras para mobilizar a concepção parte-todo e, neste sentido, *a metade de três*, resultante da inversão da segunda fração como a regra usual solicita, não se adapta a esta atividade, visto que precisaríamos de três inteiros para encontrar a fração que corresponde a sua metade, que logicamente seria 3/2, mas não da figura dada.

Para utilizar a regra anterior, é necessário encontrar frações equivalentes de mesmo denominador e, então, como o denominador será sempre igual a 1, o quociente dos denominadores será a fração procurada: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{3}{2}$. Ou, ainda, que $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 1}$.

Atividade 6 Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Esperamos que os alunos percebam alguma regra operatória para a divisão de números racionais; seja a dos quocientes, utilizando a transformação das frações em equivalentes de mesmo denominador, seja o *produto em cruz* ou, ainda, a multiplicação da primeira pela inversa da segunda. O importante é apresentar uma quantidade suficiente de situações para que eles desenvolvam algum caminho para essa operação, que não seja, unicamente, a regra convencional que, como vimos, não faz sentido quando utilizamos figuras para esse fim. A regra operatória da divisão de fração, que propõe *manter-se a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda,* pode ser apresentada posteriormente no trabalho com frações algébricas. Antes disso é interessante que se utilize outros processos a fim de construir significado à divisão dos fracionários.

A partir das atividades apresentadas, podemos constatar que introduzir a divisão de fração por meio de figuras não é tão simples, tendo em vista que a visualização das partes envolvidas na figura é complexa. Entendemos que a divisão de numeradores e a divisão de denominadores se apresente de maneira mais natural para os alunos. Por essa regra o aluno pode concluir que $\frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$, pois $6 \div 2 = 3$ e $15 \div 3 = 5$ ou, que $\frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{6}{15} \div \frac{10}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ou, ainda, que $\frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{6 \times 3 = 18}{15 \times 2 = 30} = \frac{3}{5}$.

Partindo da definição usual de divisão de números fracionários: qual seja *o produto da primeira pelo inverso da segunda* podemos mostrar a equivalência das regras operatórias, quais sejam, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a \times d}{c \times b} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ ou $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bd} \times \frac{bd}{bc} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Considerações finais

Acreditamos que as atividades apresentadas podem auxiliar o aluno na compreensão das regras operatórias sobre números fracionários com significado, no entanto, elas não são suficientes para que o mesmo possa conceituar adequadamente os números racionais. É necessário descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo se desenvolvam independente de representações figurais, pois o aluno deve aprender significativamente tais regras e não memorizá-las. Atualmente, o que se observa é a impotência do aluno frente a cálculos simples com números fracionários, mostrando que não entende o assunto e não domina as regras.

Se quisermos que o aluno construa conhecimentos matemáticos com significado, durante o ensino básico, o quadro da educação atual precisa ser mudado. O aluno precisa dos conhecimentos iniciais bem fundamentados para ter sucesso na aprendizagem de novos conteúdos matemáticos.

No entanto a discussão não é tão simples. Para Moreira (1999), é indispensável uma análise prévia daquilo que se vai ensinar porque nem tudo que está nos programas, nos livros e em outros materiais educativos do currículo é importante. Além disso, a ordem em que os principais conceitos e conteúdos aparecem nos manuais educativos e nos programas, muitas vezes, não é a mais adequada para facilitar a interação com os conhecimentos prévios do aluno.

Por outro lado, Moreira e David (2005) acreditam que os saberes fundamentais à prática pedagógica escolar não são devidamente discutidos no processo de formação e que a prática docente escolar não é capaz de produzir os saberes associados à ação pedagógica do professor. Nesse mesmo sentido, Silva (2005) mostra que, em formação continuada, os professores não escolheriam estudar números fracionários, por não questionarem o modo como ensinam, nem o domínio de validade de seus conhecimentos. Mas, ao constatarem que não dominavam plenamente o assunto e, dele, possuiam uma visão limitada, alguns resistiram a uma re-elaboração de seus próprios significados para números fracionários. Concordamos com Ponte (1992), quando afirma que é necessária uma outra atitude da sociedade em relação à escola e outra atitude da escola em relação a si mesma.

Referências

BEHR, M. J. *et al.* Rational-number concepts. In: **Acquisition of mathematical concepts and process.** R. Lesh; M. Landau (Eds.), New York: 1983, p. 91-123.

_____Rational Number, Ratio and Proportion. In: D. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** NY: Macmillan Publishing, 1992, p.296-333. Disponível em http://education.umn.edu/rationalnumberproject. Acessado em 16/03/2004.

GOMES, M. L. M. Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira. In: **Bolema,** Rio Claro (SP), ano 19, n. 25, 2006, p. 17-44.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: **Number Concepts and Operations in the middle grades.** J. Hiebert; M. Behr (Eds.). Hillsdale, Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1988, p. 162-181.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. In: **Bolema,** Rio Claro (SP), ano 17, n. 21, 2004, p. 1-19.

____. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 11).

PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In: **Educação Matemática: temas de investigação**. Lisboa: J. P. Ponte (Ed.) 1992. p.185-239.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.** 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil. 2005.

Aprovado em janeiro de 2008
Submetido em maio de 2007