Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 219 a 243, abril 2011 ISSN 0103-636X

# O Processo de Elaboração do Conceito de Potenciação de Números Fracionários: uma abordagem histórico-cultural

# The Development Process of the Concept of Fractional Numbers Potenciation: a historical-cultural approach

Ademir Damazio[1]

## Resumo

O estudo tem como foco o processo de elaboração do pensamento conceitual de potenciação de números fracionários por parte de um grupo de catorze alunos da 7ª série do Ensino Fundamental, com treze anos idade, que aceitaram espontaneamente o convite para participar do projeto. A base de análise, à luz da abordagem histórico-cultural, foi a execução, pelos estudantes, de uma sequência de ensino que lhes foi proposta, conjunto de situações organizadas com atenção aos princípios e às noções lógico-matemáticas do conceito de potenciação produzidas historicamente, com ênfase na ideia de sequência que tem a unidade como termo de referência. Os diálogos conceituais promovidos pelas situações de ensino apresentadas foram subsidiadoras decisivos para que os alunos percebessem que a potenciação de números fracionários demanda: uma nova escrita da fração; a inversão dos termos da fração (numerador e denominador) na transformação de expoente positivo em negativo e vice-versa; a adoção de procedimentos aritméticos, geométricos, algébricos e mentais para determinar um termo consequente ou antecedente de uma sequência de base fracionário.

**Palavras-chave:** Conceitos. Potenciação. Números Fracionários. Abordagem Histórico-Cultural.

[1] Doutor em Educação – Universidade Federal de Santa Catarina. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma SC. Endereço para correspondência: Av. Universitária, 1105 – Bairro Universitário – CEP 88806-000, Criciúma – SC. E-mail: add@unesc.net

## Abstract

This study focus on the process of elaboration of the concept of fractional numbers potenciation by a group of 14 primary school students (7th grade), thirteen year-old. Based on the historical, cultural perspective, we propose a teaching sequence, a group of situations organized according to the logic-mathematical principles and notions on the concept of potenciation historically produced, with an emphasis on the idea of sequence having unity as the term of reference. The conceptual dialogues created in the teaching situations were decisive to show the students that fractional numbers potenciation demand: a new writing of the fraction; the inversion of the fractional terms (numerator and denominator) in the transformation of positive exponent into negative and vice-versa; the use of arithmetic, geometric, algebraic, and mental procedures in order to determine a consequent or antecedent term in a fractional base sequence.


**Keywords:** Concepts. Potenciation. Fractional Numbers. Historical-Cultural Approach.

## O contexto do estudo e seu referencial

A práxis da docência e pesquisa relacionada à Educação Matemática foi marcada pela ansiedade em contribuir para a superação da indiferença dos alunos durante as aulas e o mal-estar de muitos deles em relação à matemática. Cumplicidade e compadecimento com a situação desprivilegiada dos estudantes foram propulsores de reflexões que levaram-me à constituição de ideários que caracterizaram fases distintas do processo de entendimento das multiplicidades de relações envolvidas nas atividades humanas de ensinar e aprender matemática. Num primeiro estágio de vivência docente, caracterizado pela vontade de acertar, a convicção era de que a saída estava numa forma de “explicar o conteúdo”. Em seguida, o entendimento passou ser a construção e utilização de materiais didáticos como forma de “prender a atenção” dos alunos. O terceiro estágio foi inspirado pela elaboração de alternativas metodológicas, com a crença de que elas seriam a solução para o desinteresse pelas aulas de Matemática. Finalmente, a fase marcada pela compreensão de que a atenção discente como finalidade para as criações pedagógicas revelava ingenuidade, pois ela não é algo que se adquire num momento exclusivo em função de uma ação escolar.

A boa vontade revelava uma concepção de educação que supervalorizava as técnicas de ensino em detrimento da compreensão da natureza do ensino, da aprendizagem e da matemática. Volta-se à adoção de "metodologias de ensino" que negligenciam a análise e a formação de conceito matemático constituído de significado e sentido para o aluno.

A tomada de consciência da singeleza dos esforços para envolver os alunos nas aulas de Matemática surgiu do pressuposto da abordagem histórico-cultural ao dizer que a atenção humana é uma característica do desenvolvimento intelectual e ocorre articuladamente com o processo de formação do pensamento conceitual. Por exemplo, na adolescência, Vygotski[2] (1996) diz que a atenção está duplamente vinculada à função do conceito: primeiro porque, ao atingir certo nível de desenvolvimento, ela constitui uma premissa indispensável para o pensamento em conceito; este, por sua vez, indica que a atenção atingiu um estágio superior. Vygotski (2001) também alerta que isso ocorre pela necessidade de articulação de um conceito e outro – sistema conceitual –, que é uma das características do processo de desenvolvimento das funções psicológicas superiores, entre elas a atenção voluntária.

Com a intenção de contribuir para a reflexão sobre o processo de elaboração de conceitos matemáticos, envolvi-me em três estudos, com foco na ideia vigotskiana de sistema conceitual, especificamente o da potenciação. A opção por estudar o processo de ensino e de aprendizagem do referido sistema conceitual foi instigada pelas constantes interrogações, tanto pessoais quanto dos alunos do ensino fundamental e de graduação, sobre o raciocínio gerador da síntese histórica: "todo número elevado a zero é igual a 1". Qual o professor de Matemática que não foi interpelado com tal pergunta?

As repostas que se apresentaram, entre os anos de 1980 e 1990 – nos livros didáticos, em cursos de especialização – não foram convincentes nem acenaram para as possibilidades de elaboração de uma sequência de ensino a fim de que os alunos compreendessem as peculiaridades lógicas da referida produção científica. Os educadores matemáticos respondiam-me de forma coincidente com aquelas encontradas nos livros didáticos: "por convenção" ou "pela propriedade de divisão de bases iguais". Por sua vez, os matemáticos também eram taxativos: "por definição".

[1] As referências Vygotski e Vigotski que aparecem em todo o texto conservam a escrita das obras citadas.

A naturalidade com que respondiam causava-me espanto por duas razões. Primeiro, porque era uma espécie de senso comum entre professores do ensino fundamental e parecia que nossos interlocutores de sabedoria superior pensavam que desconheciam as suas justificativas. Segundo, porque as respostas dadas pela academia, quando levadas à sala de aula, não satisfaziam os alunos. Certa ocasião, o diretor da escola alertou-me de que os alunos não estavam convencidos desse tipo de explicação para a potência de expoente zero. Na verdade, eles queriam saber que raciocínio elaborado historicamente levou àquela síntese, não só por propriedade ou definição, mas explicada pela ideia de multiplicação de mesmos fatores como os demais expoentes iguais ou maiores que dois. Ou como me disse um aluno: "Não precisa ser multiplicação, pois parece impossível, mas tem que sair dali".

A partir de então (segunda metade dos anos 1980), a epistemologia do conceito de potenciação, entre outros, passou ser o alvo. Na época, sem muitas credenciais interpretativas, recorri à literatura sobre história da matemática Eves (1995), Boyer (1996), Ríbnikov (1987), Ifrah (1997) e não encontrei referência explícita que tratasse da questão.

Focado nessa problemática, deparei-me com dois fatos que foram determinantes para uma resposta, não decisiva, um pouco mais convincente. Um deles, oriundo da observação de uma criança de sete anos de idade que brincava com palitos de fósforo e dizia que inventara um jogo. Tratava-se de uma sequência de montes de palitos, com a condição que o inicial tinha apenas um: a partir daí, a regra de constituição dos demais era que cada um deles deveria ter, nas palavras da criança: "dois de antes; o de antes e outro de antes." A figura a seguir traduz a sequência montada pela criança:

|     ||     ||||     |||| ||||     |||||||| ||||||||

Ao analisar os montes e proceder à contagem em cada um deles, foi possível perceber que se tratava de uma sequência de potências de dois: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Algo ainda era confuso para mim e a situação apresentada ainda não era indicação que poderia está ali pistas plausíveis ao problema em questão. Em seguida, a criança diz: "Eu consigo bastante jogo. Tem que começar sempre do um. Daí é tudo três de antes; é tudo quatro, quando o jogo é do quatro". Pega os palitos e passa a construir as sequências:

```
|    |||    ||| ||| |||     ||||||||| ||||||||| |||||||||
|    ||||   |||| |||| |||| ||||
|    |||||  ||||| ||||| ||||| ||||| |||||
```

Naquele momento, ano de 1988, o jogo da criança e as inferências extraídas da história da Matemática deram-me subsídios para a elaboração de algumas ideias ou significações a respeito do conceito de potenciação. Uma delas é de que a sua característica fundamental é a sequência em progressão geométrica, em que a referência inicial é a unidade e, a partir do termo seguinte e dos subseqüentes, surge o princípio definidor da base, isto é, cada termo é tantas vezes o anterior. Assim, os jogos dos palitos da criança poderiam ser traduzidos, respectivamente, por: $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$ ...; $3^0$, $3^1$, $3^2$, $3^3$, ...; $4^0$, $4^1$, $4^2$, ... e $5^0$, $5^1$, $5^2$,... Dessa forma, passei a admitir que $2^0 = 1$ porque nenhuma vez apareceu agrupamento de dois, tendo apenas a unidade, elemento inicial de referência; $3^0 = 1$ indica que ainda não houve agrupamentos de três; o mesmo ocorre para os demais números com expoente zero.

Desde então, adotei os "jogos da criança", a árvore genealógica na relação filho-pais, a relação quantidade de dobras e partes de uma folha de papel e tantas outras, como situação de análise no processo de elaboração do conceito de potenciação. Os alunos não faziam objeções. A ideia da sequência foi apresentada em oficinas de eventos de Educação Matemática, em cursos de capacitação de professores e especialização, que contribuíram para aprofundamentos de ordem pedagógica e epistemológica.

Os estudos continuaram com a expectativa de sistematizar um referencial que respaldasse teoricamente a explicação originária do jogo dos palitos e as demais operações didáticas. Este é o segundo fato, mencionado anteriormente, que contribui para a construção da resposta aos questionamentos sobre a potência de número de expoente zero. Entretanto, não foi a matemática que, inicialmente, forneceu os subsídios suficientes para a fundamentação necessária, mas os profícuos e, às vezes, solitários estudos sobre a abordagem histórico-cultural. Entre tantas teses sobre o desenvolvimento de conceitos científicos, por parte do ser humano, vale citar:

> É muito estreito e interessante o vínculo entre os diversos conceitos. A recíproca inter-relação e transferência dos conceitos, que é um reflexo da recíproca transferência e vinculação dos fenômenos da realidade, traz por consequência que cada conceito surge relacionado com todos os restantes e uma vez formado vem a determinar, por assim dizer, seu lugar no sistema de conceitos anteriormente conhecido. (VYGOTSKI, 1996, p. 71).

Portanto, foi a ideia de sistema conceitual que deu pista para entendimento de que a potenciação tem vínculos estreitos não só com a multiplicação, como também contagem, adição, progressão, exponencial e logaritmo, entre tantos.

Outro pressuposto histórico-cultural que deu base para esse achado foi buscado na proposição de Davydov (1998), que estabelece como objetivo do ensino escolar o desenvolvimento do pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Para o autor, o pensamento empírico tem sua importância na vida cotidiana, porém aparece "obstaculizando o caminho" quando se pretende que o aluno entenda bem o conhecimento teórico.

Esse olhar conduziu à literatura matemática em busca da significação teórico-científica do conceito de potenciação. Eves (1995), Boyer (1996) e Maor (2003) contribuíram para a inferência de que a base teórica do referido conceito é o logaritmo, por ser o maior nível de sistematização do sistema conceitual. Maor (2003) salienta que a criação dos logaritmos pode se considerada a ideia matemática que maior entusiasmo provocou na comunidade científica.

Miorim e Miguel (2002, p. 28) denominam "concepção aritmética" quando "os logaritmos são concebidos como classes particulares de números sequenciados aritmeticamente e que estão em correspondência com outras classes particulares de números sequenciados geometricamente".

Os referidos autores dizem que Napier, precursor da sistematização científica do conceito de logaritmo, ao fazê-la com a noção de sequência, apresenta-a em sua forma geométrica que, por sua vez, envolve cinemática, aritmética, função e trigonometria:

> geométrica, porque o logaritmo não apareceria como um número puro, mas como a medida de um segmento de reta; cinemática, porque a situação usada para descrever tal conceito envolvia a coordenação de dois movimentos; aritmético, porque o mesmo conceito era expresso por meio do relacionamento entre duas sequências de números, uma geométrica e outra aritmética; funcional, porque a situação cinemática envolvia uma grandeza variando em função de outra; e trigonométrica, porque Napier se propôs a determinar, não os logaritmos de segmentos de reta genéricos, mas os logaritmos de segmentos de reta representativos dos senos de certos ângulos. (MIORIM; MIGUEL, 2002, p. 50).

A potenciação, com as ideias de sequência (aritmética e geométrica) e relação e função exponencial, é encontrada em alguns problemas na história medieval da matemática. Por exemplo, Ifrah (1997) apresenta um problema sobre o jogo de xadrez envolvendo Sessa, um sábio professor de matemática e ciências, criador do jogo, e um rei da Índia. Também Lauand (1986) traz um problema em que certo rei ordenou a um servo que convocasse exército em 30 localidades, de modo que, em cada uma delas, arregimentasse tantos homens quantos para lá tivesse levado.

Essas buscas foram determinantes para os estudos envolvendo alunos do ensino fundamental na execução da sequência de ensino sobre o sistema conceitual de potenciação de números naturais, com a ideia sequência. O planejamento da sequência de ensino para números naturais não foi difícil, pois as situações e problemas mencionados anteriormente foram a base para elaboração de outras situações. Os resultados das pesquisas (DAMAZIO, 2006; DAMAZIO; COLARES; PEREIRA, 2005) apontam que os alunos de quarta e quinta série do ensino fundamental se apropriaram das ideias, princípios e significações do conceito de potenciação, o que expandiu-se para as noções de exponencial e logaritmo.

Esse contexto gerou expectativa sobre o processo de elaboração do sistema conceitual de potenciação de números fracionários com a ideia de sequência, pelos alunos do ensino fundamental. Assim, foi definido como problema da presente pesquisa: Como ocorre o processo de elaboração do sistema conceitual de potenciação de números fracionários, por parte dos alunos da sétima série do ensino fundamental, ao executarem uma sequência de ensino-aprendizagem planejadas com base nas ideias e significações que foram geradas historicamente?

O desafio que se apresentou foi justamente o planejamento da sequência de ensino com base nas mesmas ideias – adotadas nas pesquisas, mencionadas anteriormente, com números naturais – de sequência (Progressão Geométrica para as potências e Progressão Aritmética para os expoentes, tendo a unidade como referência) para números fracionários. Desafio porque teria de ser uma produção pessoal, uma vez que esse não é enfoque dado nos livros didáticos e na literatura concernente à educação matemática.

As sequências numéricas com termos de base fracionária, diferentemente de quando se trata de números naturais em que os termos são maiores que a unidade, requerem a expansão também para números menores que um. Ou seja, cada situação a ser analisada ou executada pelos alunos deveria ser planejada de forma tal que a unidade fosse ponto de partida e cada termo à sua direita e à sua esquerda representasse uma fração de vez (razão) do termo anterior. Depois de muito estudo, a opção foi iniciar por situações de análise com sequência de potência de números naturais com expoente positivo, à direita da unidade. E, a partir dela, com orientação da pergunta-guia, surgem os termos fracionários à sua esquerda, que é transformado em base inteira de expoente negativo.

O surgimento de expoentes inteiros relativos na sequência numérica se tornou critério para estabelecer que alunos da sétima série do ensino fundamental seriam os partícipes da pesquisa, uma vez que esse campo numérico, normalmente, tem seu lócus de estudo somente na sexta série. Os estudantes, em número de quatorze e faixa etária entre doze e treze anos de idade, constituíam o corpo discente de uma Escola de Educação Básica, situada no sul do Estado de Santa Catarina, que explicitava em sua proposta pedagógica a opção teórica pela abordagem histórico-cultural. A participação deles na pesquisa se deu espontaneamente como manifestação de aceite ao convite do pesquisador para uma classe com trinta e seis alunos. O envolvimento na pesquisa ocorreu com anuência da direção da escola e da professora de Matemática, bem como com a permissão dos pais. A participação aconteceu em oito encontros, um por semana com a duração de uma hora e meia, realizados no período vespertino, uma vez que estudavam pela manhã.

Como o estudo envolveu alunos em situação de aprendizagem, importa trazer as ideias sobre o processo de formação de conceitos, segundo a perspectiva histórico-cultural. De acordo com Vigotski (2001), a aprendizagem começa muito antes da aprendizagem escolar. Antes de aprender a aritmética e seus algoritmos, toda pessoa elabora pensamento quantitativo, aditivo, subtrativo e outros com teor significativo de operações numéricas, de forma complexa ou não. Para as crianças, por exemplo, as formações conceituais ocorrem por meio das relações sociais de brincadeiras e no convívio de situações do cotidiano. O autor em referência alerta que o curso da aprendizagem pré-escolar não tem incidência direta na aprendizagem escolar. Portanto, esta não começa no vácuo, pois é precedida por aprendizagens não escolares que se constitui como uma etapa definida de desenvolvimento.

Vigotski (2001, p. 324) entende que “a aprendizagem está à frente do desenvolvimento”. Por exemplo, diz que, em situação escolar, a apropriação de um conceito aritmético não se caracteriza com um estágio final, mas é apenas um começo, uma vez que “a curva do desenvolvimento não coincide com a curva do aprendizado do programa escolar”. Sendo assim, é possível determinar pelo menos dois níveis de desenvolvimento intelectual: o desenvolvimento efetivo do indivíduo, ou seja, o nível de desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial, indicativo das possibilidades dele realizar tarefas com auxílio de outros para, posteriormente, efetivá-las sozinho.

É no contexto teórico da diferença entre esses dois níveis que Vygotski (1993) apresenta o conceito de “zona de desenvolvimento proximal” visto na dinamicidade das relações entre o indivíduo e o ambiente social. O entendimento desse conceito permite que o professor estude o que aluno sabe e o que ele pode vir a aprender na interação entre ambos. Para Vygotski (1996), é no período de maturidade sexual, fase de transição, que os conceitos em processo de desenvolvimento realizam mudanças revolucionárias tanto no conteúdo quanto em sua forma. É nesse momento que ocorre a passagem do nível do pensamento por complexos – que sucedeu o nível sincrético – ao nível do pensamento conceitos genuínos, uma nova forma de atividade intelectual, um novo modo de conduta e mecanismo intelectual. O pensamento em conceitos "abre para o adolescente o mundo da consciência social objetiva, o mundo da ideologia social, até então assimilada de maneira incompleta, pois o material cultural existente não participa ainda ativamente em sua criação" (VYGOTSKI, 1996, p. 64).

Segundo Vygotski (1993), os conceitos podem ser definidos em duas categorias: cotidianos e científicos, que estão inter-relacionados, porém seguem caminhos diferentes em sua dinâmica e desenvolvimento. O conceito científico é um sistema de relações que o homem estabeleceu historicamente e atinge o nível de abstração com base em leis, princípios, teorias e propriedades próprias. Desenvolve-se pela linguagem e reflexão (um processo de análise e síntese), o que exige atenção intencional e voluntária daqueles que buscam sua aprendizagem em situação de ensino. É independente do contexto e é aprendido pelos alunos em situação formal de educação.

Os conceitos cotidianos são desenvolvidos na convivência diária com experiências imediatas e noções intuitivas. São assistemáticos e estão vinculados a um contexto. De acordo com Vygotski (1993, p. 253), o conceito cotidiano:

> cria uma série de estruturas necessárias para que surjam as propriedades inferiores e elementares dos conceitos. Por sua vez, o conceito científico, depois de ter percorrido de cima para baixo certo fragmento de seu caminho, abre espaço para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos, preparando de antemão uma série de formações estruturais necessárias para dominar as propriedades superiores do conceito.

Os conceitos cotidianos se desenvolvem de forma ascendente, de baixo para cima, em direção aos conceitos científicos que, por sua vez, se desenvolvem de forma descendente, de cima para baixo, em direção aos conceitos cotidianos.

O conceito científico descende se o aluno recorre às suas significações para explicar de forma consciente o real da vida cotidiana. Entretanto, o caráter consciente do conceito científico não é garantido pela mera indicação de suas características essenciais tais como seus atributos e sua definição. É preciso que os sujeitos recorram a eles para solucionar problemas. Só assim, os conceitos científicos cumprirão um dos seus papéis que é colocar em cheque as limitações e as fragilidades do conceito cotidiano (DAMAZIO, 2000).

Entretanto, um conceito nunca está solto, mas está reciprocamente relacionado com outros conhecidos, o que determina "um sistema conceitual" Vygotski (1996). O autor diz que a relação recíproca e a pertinência interna dos conceitos de um sistema convertem o conceito em um meio fundamental para sistematizar e conhecer a realidade exterior, como também "compreender como se assimila adequadamente a experiência social da humanidade historicamente formada" (VYGOTSKI, 1996, p. 72).

## A aprendizagem do conceito de potenciação de números fracionários

Conforme Vygotski (1993), no processo de formação de conceitos, o aluno não se apropria do conceito em si, mas das suas significações. Nesse sentido, ao planejar a sequência de ensino, a preocupação foi privilegiar os princípios do conceito de potenciação, traduzidos para as especificidades de números fracionários. Para tanto, foram adotados os mesmos critérios da pesquisa realizada (DAMAZIO, 2006), cujo foco foi o processo de apropriação do conceito de potenciação de números naturais, quais sejam: 1) a unidade como ponto de partida, geradora da sequência, cuja constituição depende da base (razão) estabelecida; 2) a sequência se expande tanto à direita quanto à esquerda da unidade; 3) há um fator fracionário constante (razão) que, multiplicado por um termo, gera seu sucessor. Esse fator, além de indicar a razão de uma progressão geométrica, define a base. Assim, cada termo da sequência é uma potência e a localização dele, tendo como referência a unidade, determina o expoente. Dessa forma, os termos (potências) definem uma progressão geométrica e os expoentes uma progressão aritmética de razão um.

A primeira situação de análise proposta aos alunos se referia à potenciação com números naturais, pois eles haviam estudado na 5ª série com base nos princípios teóricos do conceito de potenciação e nos pressupostos teóricos da abordagem histórico-cultural. Em seguida, foi estabelecido diálogo com base numa “pergunta-guia”, que levou às noções iniciais de números fracionários como decorrentes da própria potenciação, interrelacionadas à ideia de números inteiros relativos. De acordo com Vigotski (2001, p. 111), “com auxílio de pergunta-guia, exemplos e demonstrações, o aluno desenvolve atividades e supera seu nível de desenvolvimento efetivo”. A pergunta-guia em todas as situações apresentadas foi: Quantas vezes o termo seguinte representa o anterior? Ou, às vezes, era substituída por: Quem vem antes ‘desse termo’ para que ele seja ‘tantas vezes’ aquele?

A seguir, são apresentadas algumas situações de análise da sequência de ensino consideradas como aquelas que propiciaram o desencadeamento das elaborações conceituais, inicialmente com números naturais, anunciadoras de possibilidades de atingir a potenciação de números fracionários. Da mesma forma, os diálogos selecionados são recortes considerados como representativos de ocorrência das elaborações dos alunos, extraídos das transcrições das filmagens.

## A situação de análise com desenho

Essa proposição se traduz numa introdução, ainda com números naturais que, para o grupo de alunos, ainda não trazia elementos novos, pois a potenciação no referido campo numérico fora estudada por eles na quinta série, com os mesmos princípios metodológicos de ensino adotado na presente pesquisa. Nos seus estudos escolares, a ideia de sequência fora rompida na aprendizagem da potenciação de números fracionários que fora apresentada somente como multiplicação de mesmo fator.

Um aluno, P, por solicitação do pesquisador, foi ao quadro de giz e fez um desenho qualquer, cuja opção foi um boneco. A orientação seguinte foi que ele adotasse o seu desenho como termo de referência – unidade – e passasse a construir uma sequência de montes de bonecos. A quantidade de bonecos no monte subsequente era aleatória. O número de vez que esta aumentara em relação à unidade deveria ser adotado como critério para a construção dos demais montes. O diálogo com pergunta-guia, orientações, explicações era estabelecido com P e com os demais alunos:

> Pesquisador: Quantos bonecos ele fez?
> Alunos: Um.
> Pesquisador: Então, continue fazendo montinhos ou grupos de bonecos.

O aluno desenha no quadro três bonecos.

> Pesquisador: Aquele monte de referência, feito inicialmente, é o ponto de partida. Se vocês compararem o que ele fez, quantas vezes equivale ao anterior, ao de referência?
> Aluno G: Três vezes.
> Pesquisador: Queria que vocês usassem essa lógica, cada monte fosse três vezes o anterior.
> Aluno M: Três vezes mais, ou seja, vai ser 3, o próximo vai ser 3 x 3 que é 9, depois 3 x 9. A gente faz uma pirâmide e não vai poder mudar.

Em seguida, o aluno P diz que o próximo termo teria nove bonecos, mas ao desenhá-los no quadro, fez apenas dois montes com três bonecos cada.

> Pesquisador: Tem certeza que é essa quantidade?
> Aluno G: Faltou um monte de três.

O aluno S se dirige espontaneamente ao quadro e desenha o terceiro monte ou termo da sequência, de forma correta, isto é, vinte e sete unidades. Surge o comentário entre os demais de que aquela situação tratava-se de potenciação.

M se dirigiu ao quadro e o pesquisador pergunta: 1, 3, 9 e 27..., que números são esses?

> Alunos: São números ímpares e são múltiplos de três.
> Pesquisador: É tudo isso que vocês falaram, mas prefiro que escrevam esses números como multiplicação de fator três. Como fica?

M começou pelo termo 27, escrevendo-o como 3 x 9, o termo 9 em 3 x 3. Ao chegar no monte de 3, ela perguntou:

> Aluno: E o número 3? Posso escrever como 1 x 3?

> Pesquisador: O 3 é o primeiro grupo de três, desse modo ele fica escrito como 3, além disso, 1 (um) não é múltiplo de três.

Como a representação multiplicativa do 27 tinha sido feita com 3 x 9, o pesquisador perguntou:

> Pesquisador: Você consegue escrever o número 27 só com o fator 3?
> Aluno M: Sim, 3 x 3 x 3.
> Pesquisador: Como você escreve este número em forma de potenciação? Quantas vezes o 3 se repetiu?
> Aluno E: Três vezes, então $3^3$.
> Pesquisador: E depois o restante da sequência, como fica a escrita?
> Aluno E: O nove, $3^2$, o três, $3^1$ e o um, $1^0$.

O aluno confunde a unidade como a potência de um, $1^0$, em vez de três elevado a zero. Tal entendimento remete a um novo questionamento, tendo como base a ideia de sequência aritmética que se produz no expoente.

> Pesquisador: A sequência é de base 3, perceba que você escreveu $3^3$, $3^2$, $3^1$ e, agora, a base necessariamente deve a mesma, 3. Qual deveria ser o expoente do três, uma vez que aqui não há formação de nenhum grupo de três?
> Aluno E, acompanhado dos demais alunos: $3^0$, nenhum grupo de três.

O procedimento adotado traduziu dois aspectos fundamentais para que os alunos reelaborassem características e relações específicas do conceito científico de potenciação. Um deles é a indicação de um aluno, em sistema de rodízio, para estar no quadro de giz para representar pictórica ou numericamente a sequência. Tal procedimento possibilitou que as perguntas-guia se dirigissem aos demais alunos, o que propiciou uma efetiva interação do grupo. Cada procedimento no quadro de giz também era realizado, concomitante e individualmente, numa folha de anotações. As dúvidas e as certezas eram observadas, consequentemente, corrigidas ou aceitas pelo coletivo dos estudantes com respaldo do pesquisador.

O segundo aspecto é que o desenho metodológico da sequência de ensino se explicitava e se traduzia nos procedimentos dos alunos, pois: representavam pictórica e numericamente a sequência, em que cada termo indicava a quantidade de unidade; transformavam os termos em multiplicação de dois fatores, quando possível; transformavam os termos em multiplicação de mesmo fator, com a justificativa da possibilidade ou impossibilidade de tal procedimento; apresentavam na forma exponencial com a explicitação de duas regularidades, qual seja, a manutenção de um mesmo valor para a base e a sequência de número natural do expoente.

Vale ressaltar que os procedimentos de intervenção adotados basearam-se nas indicações de Vygotski (1995) quando afirma que três elementos psicológicos são fundamentais no processo formativo de conceitos científicos nos alunos. Primeiro, o estabelecimento das dependências entre os conceitos, isto é, o sistema conceitual; segundo, a conscientização da própria atividade mental da lógica do conceito; terceiro, consequência dos dois anteriores, a aquisição de uma relação especial com o objeto que permite refletir aquilo que era inexequível com as noções habituais. A tradução do último elemento está na manifestação dos alunos na leitura dos expoentes em ordem decrescente – do maior termo representado para o menor – que gerou a elaboração conclusiva, naquela sequência numérica, de que a unidade, necessariamente, seria representada por $3^0$.

Dando continuidade às intervenções para provocar a compreensão dos alunos, o pesquisador apresentou: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

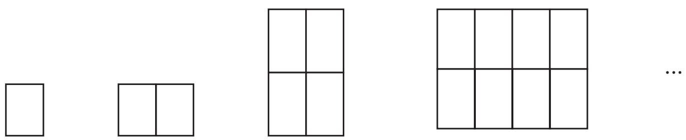
> Pesquisador: - É sequência de potência?
> Alunos: - Sim, de base 2.
> Pesquisador: - Então como escrever na forma de potência?
> Alunos: - $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^4$, $2^5$.

Nas duas situações apresentadas, o único equívoco ocorreu com o expoente zero, por um aluno que, em vez de $3^0$, fez a leitura $1^0$. Diante de qualquer sequência, exposta verbalmente ou por escrito nas mais diversas formas de notação, todos os alunos identificavam como se tratasse ou não de potência. Como diz Vygotski (1995), a tomada de consciência das operações mentais requer a sua reconstituição na imaginação, com o objetivo de atingir a sua expressão discursiva relacionada à generalização. Vale reafirmar que, até esse momento da sequência de ensino, a generalização dos alunos se tratava no nível conceitual da potenciação com números naturais, que fora tema de estudo dos alunos na quinta série. Por isso, a necessidade de colocá-los diante de situações análise que expandissem o sistema conceitual para os números fracionários, o que se inicia com as proposições que serão apresentadas a seguir.

## A situação de análise com folhas de papel

A proposta do pesquisador foi que os alunos observassem a quantidade de folhas de papel em cada monte, exposto no quadro, e estabelecem a relação entre um termo e seu antecedente ou consequente. As folhas em si não representavam a condição para o processo de formação do conceito, mas sim as inter-relações entre um termo (monte) e outro da sequência que apontavam para a generalização conceitual propriamente dita. Como afirma Vygotski (1993), a relação entre os conceitos não ocorre por agregações mediante fios associativos nem por seguir o princípio estrutural de figuras e objetos. Pelo contrário, ela se apresenta pela essência de sua natureza teórica.

Ao observarem a sequência de folhas, imediatamente, os alunos identificaram a quantidade em cada termo como potência de base dois. Prontamente, o aluno P fez a escrita numérica, abaixo de cada monte de folhas, do valor do respectivo termo, como também da representação exponencial, conforme figura a seguir.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | |
| $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | |

A pergunta-guia foi lançada:

> Pesquisador: - Quantas vezes o dois é a quantidade do monte anterior, ou quantas vezes o quatro inclui o monte anterior, e assim sucessivamente?
>
> Alunos: - É sempre duas vezes o anterior.

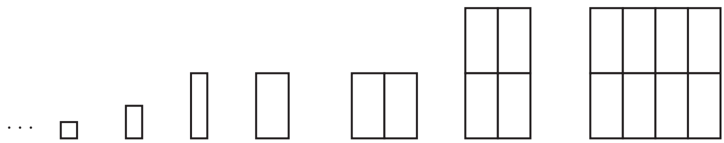
Alguns deles justificaram a resposta com a afirmação de que se tratava de potências de dois. Nesse momento, foi-lhes dirigida a pergunta-guia em busca dos termos que expandissem a sequência à esquerda da unidade, qual seja:

> Pesquisador: Quem vem antes do um para que ele seja duas vezes o anterior?
>
> O aluno M: Um meio ( $\frac{1}{2}$ ).
>
> Pesquisador: Agora, o que vêm antes da metade, para que ela seja duas vezes aquela quantidade?
>
> Alunos: A metade da metade, $\frac{1}{4}$ .
>
> Pesquisador: E quem vem antes de $\frac{1}{4}$ ?
>
> Alunos: $\frac{1}{8}$ .

À medida que o pesquisador questionava os alunos, o papel era recortado e, consequentemente, era obtida uma nova representação fracionária, que levou à formação da sequência $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ ...

As representações e generalizações daquela situação de ensino seguiram os seguintes passos:

1) Representação pictórica



2) Representação com termos com termos inteiros e fracionários, respectivamente, à direita e à esquerda da unidade

$$\ldots \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \ldots$$

3) Representação numérica na forma exponencial para os termos naturais e denominadores das frações

$$\ldots \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^1} \quad 2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \ldots$$

4) Representação numérica na forma exponencial de base dois e expoente inteiros relativos

$$\ldots 2^{-3} \quad 2^{-2} \quad 2^{-1} \quad 2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \ldots$$

A transformação da fração em números com expoentes negativos foi obtida pela leitura dos expoentes em ordem decrescente. Ou seja, da direita para a esquerda teríamos 3, 2, 1, 0. Isso levou os alunos a estabelecerem que $\frac{1}{2}$ seria o mesmo que $2^{-1}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ e, assim por diante. Nas palavras do aluno T: "Pela lógica, o um meio é dois elevado a menos um, o um quarto e dois na menos dois, o um oitavo é dois na menos três".

Outras situações envolvendo bases diferentes – 3, 4, 5 e 10 – foram analisadas com as diversas representações numéricas até a síntese com expoentes inteiros relativos, como aquela de base dois descrita anteriormente. Nas discussões, vieram à tona duas características conceituais similares:

> Aluno N: - todos os termos se transformam em número natural, mesmo a fração que é um número natural escrito com expoente inteiro negativo.
> Aluno R: - as frações que surgem à esquerda do termo de expoente zero, têm como numeradores a unidade e os denominadores são os mesmos termos que aparecem à direita da unidade.

A preocupação com uma síntese ou regra é apresentada pelo aluno S ao afirmar: "A quantidade de termo ou monte à direita da unidade corresponde aos expoentes positivos da base e a quantidade de termo à esquerda da unidade quer dizer o expoente negativo". M acrescenta: "Os expoentes aumentam ou diminuem de um em um".

Foi no contexto de discussões e sistematizações que emergiu a necessidade de a base ou razão da sequência ser um número fracionário. Naquele momento, foi apresentada a primeira situação de análise com a expectativa de que os alunos se apropriassem das propriedades e relações do conceito de potenciação de números fracionários.

Tendo a unidade como referência, a pergunta-guia emergiu:

> Pesquisador: Qual o termo que vem depois do um para que este seja dois terços de vez dele? Seguiu-se um silêncio rompido com a resposta:
>
> Aluno M: $\frac{2}{3}$.
>
> Pesquisador: Por que dois terços?
> Aluno M: Porque dois terços de uma coisa é o dois terços.
>
> Pesquisador: Quem vem depois do $\frac{2}{3}$ para que seja $\frac{2}{3}$ de vez do $\frac{2}{3}$?
>
> Alunos: $\frac{4}{9}$.
>
> Pesquisador: Quem vem depois do $\frac{4}{9}$ para que seja $\frac{2}{3}$ de vez do $\frac{4}{9}$?
>
> Alunos: $\frac{8}{27}$.
>
> Acrescentam: $\frac{16}{81}$, $\frac{32}{243}$ ...

Diante do desempenho dos alunos que revelava a elaboração das propriedades e relações constituintes do conceito, à direita da unidade, foi lançada a pergunta-guia para que ampliasse para a esquerda:

> Pesquisador: - Quem vem antes do 1 (um) para que ele seja $\frac{2}{3}$ de vez desse número? Ou, um representa dois terços de que quantidade?
> Aluno P: Como é mesmo? A gente quer saber quem é o todo que o um é dois terços?

O momento foi riquíssimo de ideias matemáticas fracionárias, em função da espontaneidade do aluno M em afirmar: - *é o inteiro e mais a metade.*

As discussões se acirram, pois os demais componentes do grupo exigiam que ele “explicasse” a razão daquela resposta. O esperado, pela maioria dos alunos, era um valor referente à fração dois terços não três meios. Começa, assim, no grupo, a manifestação de cinco formas de pensamentos matemáticos que explicam o surgimento de $\frac{3}{2}$ .

A primeira, denominei de *mental-verbal*, pois o aluno explicita oralmente um raciocínio que pressuponho ter sido internalizado previamente em situação escolar. O aluno M em reposta às interpelações do grupo, afirma: "Se um é dois terços de vez do outro número, então o um é duas partes do todo que precisa, então, de três partes. Se um é duas partes, cada parte dele é a metade, então o todo tem três metades ou um e meio".

A explicação de M motivou o grupo a buscar alternativas que pudessem dirimir as dúvidas de dois alunos R e F. O aluno P explicitou a segunda forma de pensamento do processo de elaboração conceitual de potenciação de números fracionários, que chamei de *visual-imaginativo,* uma vez que expressa um raciocínio apoiado em representações geométricas. O aluno P teve como referência a explicação de M e recorreu à reta numérica para fazer a seguinte representação no quadro de giz:

```
          2/3 do todo

|________________________|1

|____________|____________|

0   1 parte de 3   ½   2 partes de 3   1

|____________|____________|____________| Todo

0  1 parte de 3   ½   2 partes de 3  1  3 partes de 3   3/2
```

A terceira forma de pensamento, *mental-verbal por propriedade*, pois é recorrente da propriedade de elemento inverso multiplicativo, foi trazida à tona pelo aluno S, porém sem a devida conclusão.

> Aluno S: - Penso que devia ser um número que multiplicasse por dois terços desse um.

Naquele momento, foi decisivo o pressuposto vigotskiano referente ao conceito de zdp, de que a ajuda do professor em um determinado momento do processo de desenvolvimento do pensamento conceitual é fator decisivo para que aluno em situação posterior o faça de forma independente.

Pesquisador: $1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$. Como 1 é dois terços de vez de um todo, então o único número que pode ser multiplicado por 2/3 para que o produto seja 1, é $\frac{3}{2}$.

O aluno M inferiu a explicação a seguir, que se constitui na quarta forma do pensamento, que denominei de *algébrica,* por considerar a fração desconhecida como incógnita, transformando a situação na equação do primeiro grau, $1 = \frac{2}{3}.x$, com o seguinte procedimento de resolução:

$$1 = \frac{2}{3}.x \rightarrow 3 = 2.x \rightarrow 2.x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

A quinta forma de pensamento, *reconstrução por divisão*, foi proposta pelo pesquisador. A sequência foi reconstruída por divisão sucessiva do maior termo pela razão/base, conforme segue:

$$\frac{32}{243} : \frac{2}{3} = \frac{32}{243} \times \frac{3}{2} = \frac{16}{81}$$

$$\frac{16}{81} : \frac{2}{3} = \frac{16}{81} \times \frac{3}{2} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{8}{27} : \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$1 : \frac{2}{3} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

A partir de então, foi lançada a pergunta-guia. Pesquisador: "Quem vem antes do $\frac{3}{2}$ para que ele seja $\frac{2}{3}$ de vez desse número?" Os alunos recorreram às diferentes formas de pensamento acima explicitadas e formaram a sequência para a esquerda: ..., $\frac{81}{16}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$. Além disso, adotaram o mesmo raciocínio adotado quando da construção da sequência em que surgiu o expoente negativo. O diálogo entre alunos e pesquisador, mediado pelas dimensões do conceito focalizado, contribuiu para a conclusão expressa por R: *As potências de base* $\frac{3}{2}$ *, situadas à esquerda da unidade, correspondia a expoentes negativos da fração* $\frac{2}{3}$.

Toda essa trajetória de elaboração do pensamento conceitual se reflete na representação a seguir, construída por P em concordância com o grupo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{27}{8} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\[2ex]
\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} & \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} & \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} & \left(\frac{2}{3}\right)^{0} & \left(\frac{2}{3}\right)^{1} & \left(\frac{2}{3}\right)^{2} & \left(\frac{2}{3}\right)^{3}
\end{array}
$$

A cada situação de análise proposta aos alunos, as atenções do pesquisador voltaram-se para as possibilidades deles atingirem um nível mais complexo do pensamento conceitual, sem desconsiderar as suas possibilidades, isto é, a zona de desenvolvimento proximal (VYGOTSKI, 1996). Por isso, a disposição para a interferência e orientação para que eles atingissem o nível do pensamento de conceito científico. As interações verbais entre aluno/pesquisador foram decorrentes das situações de análises à luz das ideias essenciais que caracterizam aquele conceito. Em toda base apresentada, exigia-se que os alunos elaborassem as múltiplas relações e ideias articuladas que constituem o sistema conceitual de potenciação, independente da base, natural ou fracionária. Uma dessas relações é a "transferência" de uma generalização interna de uma proposição ou situação analisada para outra. Por exemplo, levar as generalizações internas à base dois terços para as demais (por exemplo, quatro nonos, cinco terços e três sétimos, propostas aos alunos).

## Considerações

No processo de elaboração do sistema conceitual de potenciação de números fracionários, os alunos se apropriam da ideia de sequência, cujos termos são as potências de um determinado número. O raciocínio multiplicativo é sua base fundamental, inicialmente, na relação entre os termos, inclusive com a unidade (termo de expoente zero) e no definidor da base (termo de expoente 1). A multiplicação de mesmo fator é característica dos termos com expoentes naturais maiores ou iguais a dois. Ela não é o conceito de potenciação em si, mas uma das significações. A sua inclusão, por parte dos alunos, no novo contexto conceitual ocorre na execução da sequência de ensino em que se explicitam mediações em cujo teor estão as dimensões do conceito para a elaboração do raciocínio esperado.

A multiplicação aparece no sistema conceitual de potenciação antecedida por dois termos da sequência que não se transformam em fatores: um termo de expoente zero e outro de expoente um. Atingir esse nível de pensamento em conceito demandou um processo longo, mesmo que nas primeiras proposições com números inteiros um grupo significativo de alunos escrevia de imediato a sequência nas suas diversas formas de representação até a forma de potência.

Uma hipótese que se apresentou foi que os diálogos promovidos pelas situações foram decisivos para a compreensão, pelos alunos, de que a potenciação com fracionários os colocassem diante da possibilidade e necessidade de uma nova escrita da fração: número inteiro com expoente negativo. Também, foram pertinentes para que aquele grupo de alunos generalizasse a igualdade $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$. Além disso, adotar procedimentos aritméticos, geométricos, algébricos para determinar um termo consequente ou antecedente de uma sequência de base fracionário.

Vale esclarecer que este artigo focou apenas o conceito de potenciação de números fracionários, mas a pesquisa na qual se inseriu, também focou significações do conceito de função exponencial e de logaritmo. Da mesma forma, estão em fase de desenvolvimento duas pesquisas com adoção dos mesmos princípios teóricos e metodológicos: potenciação de números relativos e outra com expoente fracionário.

## Referências


BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DAMAZIO, A. **O desenvolvimento dos conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão.** 196 p. 2000. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2000.

DAMAZIO, A. Elaboração de Conceitos Matemáticos: Abordagem Histórico-Cultural. REUNIÃO ANUAL - ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 29., 2006, Caxambú, MG. **Anais...,** Caxambú, 2006.

DAMAZIO, A.; COLARES, C. B.; PEREIRA, L. S. Elaboração de conceitos matemáticos: uma abordagem histórico-cultural. JORNADA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO CONTEXTO DAS DIVERSAS LINGUAGENS DE INFORMAÇÃO, 4., 2005, Concórdia. **Anais...,** Concórdia, SC: Universidade do Contestado, 2005.

DAVYDOV, V.V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía**, Santiago, año XLVIII, n. 403, p. 197-199, jun., 1998.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

LAUAND, L. J. **Educação, Teatro e Matemática Medievais**. São Paulo: Perspectiva Editora da Universidade de São Paulo, 1986.

MAOR, E. ***e*: A história de um número**. São Paulo: Record, 2003.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: Editora da SBHMAT, 2002. Série Textos de História da Matemática; v. IX.

RÍBNIKOV, R. **História de las Matemáticas**. Moscú: Editorial Mir, 1987.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II**: Incluye Problemas del Desarrollo de la Psique. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas III: Incluye Problemas del Desarrollo de la Psique.** Madrid: Visor Distribuciones, 1995.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas IV**. Madrid: Visor Distribuciones, 1996

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem.** São Paulo: Marins Fontes, 2001.

**Submetido em Abril de 2010.**
**Aprovado em Julho de 2010.**