



# Aspectos Visuais e Conceituais nas Interpretações de Gráficos de Linhas por Estudantes\*

## Visual and Conceptual Aspects in Students' Interpretations of Line Graphs

Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho\*\*

Tânia Maria de Mendonça Campos\*\*\*

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro\*\*\*\*

### Resumo

Este artigo discute dois estudos que investigam o efeito de inferências diretas ou inversas na interpretação de gráficos de linhas por 270 estudantes, de 11 a 14 anos, de escolas inglesas. Utilizamos problemas de produtos de medidas nos quais é preciso relacionar duas variáveis para inferir o significado da terceira. O Estudo 1 explora o efeito de inferências, diretas ou inversas, na interpretação e na construção de gráficos. Os problemas com inferência direta foram mais fáceis que os problemas com inferência inversa. O Estudo 2 investiga dificuldades em combinações de problemas com inclinação positiva ou negativa e inferência direta ou inversa. As dificuldades dos estudantes com os problemas de inferência inversa parecem relacionar-se com o uso de regras intuitivas.

\* Esta pesquisa recebeu financiamento do Procad/Capes (Programa de Cooperação Acadêmica - Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Bandeirante de São Paulo (Uniban) processo n. 0145050.

\*\* Doutora em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Centro de Educação, EDUMATEC, Cidade Universitária, CEP: 50670-901, Recife, PE, Brasil. *E-mail*: lmtlcarvalho@gmail.com

\*\*\* Doutora em Matemática pela University of Warwick, Inglaterra. Professora da Universidade Bandeirante de São Paulo (Uniban), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Braz Leme, 3029, Santana, CEP: 02022-011, São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: taniammcampos@hotmail.com

\*\*\*\* PhD em Educação Matemática pela Université Montpellier 2 (UM2), França. Professor da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Centro de Educação, EDUMATEC, Cidade Universitária, CEP: 50670-901. Recife, PE, Brasil. *E-mail*: cefmonteiro@gmail.com

Gráficos de linhas ajudam estudantes a relacionar variáveis em problemas de inferência direta, mas não existe garantia de que nesses problemas os estudantes integrem aspectos visuais e conceituais da informação.

**Palavras-chave:** Gráfico de Linhas. Produto de Medidas. Inferência Direta e Inversa.

### Abstract

This article discusses two studies that investigate the effect of direct and inverse inferences in the interpretation of line graphs by 270 English school students from 11 to 14 years old. The research tasks were based on product of measures in which students need to relate two variables to infer the meaning of a third one. Study 1 explores the effect of inferences, direct or inverse, in the interpretation and construction of graphs. The problems with direct inference were easier than problems with inverse inference. Study 2 investigates difficulties in combinations of problems with positive or negative inclinations and direct or inverse inferences. Students' difficulties with inverse inference problems seem to relate to the use of intuitive rules. Line graphs help students to relate variables in problems of direct inference, but there is no guarantee that students integrate visual and conceptual aspects of information in these problems.

**Keywords:** Line Graphs. Product of Measures. Direct and Inverse Inferences.

## 1 Introdução

Nas décadas de 1980 e 1990, muitos países introduziram a Estatística no ensino fundamental. Por exemplo, a Inglaterra e o País de Gales incorporaram essa disciplina por meio do National Curriculum (DES, 1989), e o Brasil, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998). Mesmo com essas inclusões oficiais, em alguns países o ensino de Estatística teve um desenvolvimento tímido. Por exemplo, no Brasil, muitas iniciativas de investigação e de intervenção curriculares têm sido desenvolvidas com vistas a apoiar a superação de problemas no quadro do ensino de Estatística e garantir que, desde os primeiros anos de escolarização, os conhecimentos de Estatística sejam acessíveis, de maneira mais ampla e com melhor qualidade (CAZORLA; KATAOKA; SILVA, 2010).

Todavia, múltiplas questões precisam ainda ser investigadas para compreender a complexidade do ensino e da aprendizagem de Estatística. Entre outros aspectos, destacamos a necessidade de investigar dificuldades específicas na interpretação de gráficos, enquanto tópico curricular da Estatística (LIMA, 1998; MONTEIRO, 1998; MONTEIRO; SELVA, 2001; MONTEIRO, 2005; CARVALHO, 2008).

A pesquisa de Lima (1998) observou que a interpretação de gráficos veiculados na mídia impressa por professores de Matemática e *designers* era um processo complexo, influenciado pelos diferentes tipos de leitura (visual, matemática e experiencial) que emergiam dos processos interpretativos e pelo uso que os sujeitos faziam desses gráficos nas suas práticas cotidianas. No âmbito daquele estudo, Lima destaca que os sujeitos revelaram dificuldades de interpretar um gráfico que apresentava grandezas inversamente proporcionais. A investigação desse tipo de dificuldade foi aprofundada nos seus estudos de doutoramento (CARVALHO, 2008), inicialmente desenvolvidos na Universidade de Oxford Brookes, na Inglaterra. Neste artigo, são enfocados dados de dois desses estudos, cujas análises foram minuciosamente examinadas com a colaboração de colegas que compartilham o interesse de discutir a influência de elementos visuais e conceituais envolvidos na interpretação de gráficos (CARVALHO; MONTEIRO; CAMPOS, 2010).

Reconhecemos que o termo *gráfico* pode ter significados diferentes em Matemática, Estatística, Educação e em outras áreas, dependendo da finalidade, da perspectiva e da situação em que é utilizado (WAINER, 1992). Por exemplo, Biderman (1989) faz uma distinção entre o uso do gráfico para demonstrar a aplicação da Matemática e o uso da Matemática para facilitar a compreensão de dados apresentados em um gráfico. Por um lado, o gráfico é visto como um recurso formal da Matemática e, no outro sentido, é concebido como um instrumento da Estatística para apresentação de informações.

Neste artigo, a conceitualização de gráfico está relacionada com a perspectiva da Estatística, que considera alguns componentes comuns a esse instrumento, tais como: estrutura; nomeação dos dados; e especificadores (FRIEL; CURCIO; BRIGHT, 2001). Kosslyn (1994) afirma que a estrutura do gráfico pode ser composta por eixos, escalas, malha quadriculada e marcas de referência, sendo a estrutura mais simples composta por dois eixos perpendiculares em forma de L. A nomeação das informações é efetivada pelo título e pelos nomes das variáveis apresentadas no gráfico. Os especificadores são dimensões visuais, utilizadas para representar os valores dos dados, e podem ser linhas, barras, símbolos de ponto ou outros elementos que especifiquem relações particulares apresentadas pelo gráfico.

Essa classificação dos elementos dos gráficos enfatiza os componentes explícitos; contudo, é importante considerar também os componentes implícitos (MONTEIRO, 2005), como, por exemplo, a escolha das variáveis apresentadas e outros conceitos e informações vinculadas aos dados, que não são visíveis na estrutura do gráfico.

Recentemente, discussões sobre a necessidade de considerar os vários

contextos de uso dos conhecimentos estatísticos (GAL, 2002) sugerem a necessidade de valorizar diversos conhecimentos e experiências relacionadas às interpretações de dados (MONTEIRO, 2005). No âmbito dessas reflexões, destacam-se os elementos e os processos informais da construção de raciocínio inferencial na análise de dados. Zieffler et al. (2008) enfatizam que o raciocínio inferencial informal envolveria, basicamente, três componentes: fazer julgamentos, afirmações ou previsões sobre dados estatísticos, sem usar procedimentos ou métodos formais; utilizar os conhecimentos prévios sobre estatística; articular argumentos baseados em evidências para analisar dados.

O grande desafio do ensino de Estatística na escola seria, então, a valorização dos conhecimentos prévios que os estudantes possuem sobre como tratar dados em diferentes situações de seus cotidianos. Uma forma de superar tal desafio seria o desenvolvimento de abordagens de ensino que contribuíssem para a emergência de raciocínios voltados para inferências informais.

Stavy e Tiroshi (2000) argumentam que, quando estudantes são solicitados a comparar duas quantidades representadas, os seus julgamentos podem basear-se no uso de regras intuitivas que consistem de esquemas lógicos intuitivos trazidos pelos alunos para as situações de aprendizagem. Segundo Stavy e Tiroshi, o uso de lógicas intuitivas não emerge envolvido em nenhum domínio específico do conhecimento; as regras, ao contrário, podem ser ativadas por fatores externos à tarefa, que os estudantes usam como âncora para o raciocínio. Entendemos que os aspectos visuais, por se relacionarem com o uso de regras intuitivas, podem constituir o ponto de partida para a compreensão inicial dos estudantes sobre os problemas, principalmente quando estes são apresentados por meio de gráficos.

Essa proposta de regras intuitivas baseia-se, sobretudo, nos aspectos da representação dos problemas e, portanto, dão menor ênfase à discussão sobre os aspectos conceituais. Baseados na teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1983), Nunes, Desli e Bell (2003) propõem uma abordagem cuja chave seja a dimensão conceitual, para compreender como estudantes resolvem problemas que requerem comparar dados, envolvendo relações diretas e inversas.

A opção por essas perspectivas teóricas pode ser justificada por duas razões: primeiramente, o fato de a pesquisa ter sido proposta no âmbito de um processo de discussão num grupo de pesquisa internacional da Oxford Brookes

University, o qual tinha como base as ideias de Stavy e Tiroshi (2000) e as de Nunes, Desli e Bell (2003). Além disso, numa revisão ampla da literatura relacionada à temática (CARVALHO, 2008), não foi constatada a existência de trabalhos de autores brasileiros que abordassem, de maneira similar, os objetivos, a faixa etária e o nível de escolarização relacionados aos estudos apresentados neste artigo.

Na sequência, inicialmente, discutiremos as dificuldades que estudantes apresentam na interpretação de gráficos. A discussão considera tanto a dimensão representacional como a conceitual, na resolução de problemas que envolvem comparação e julgamento de dados apresentados em gráficos de linhas. Serão analisadas questões relacionadas a inferências do ponto de vista das regras intuitivas e da perspectiva conceitual. Em seguida, apresentaremos os dois estudos que investigam o efeito dos tipos de inferências, diretas ou inversas, na interpretação de gráficos de linhas por estudantes de 11 a 14 anos.

## **2 Dificuldades de estudantes na interpretação de gráficos**

Na leitura de gráficos de estrutura em L é importante compreender que um ponto ou uma linha é o resultado da projeção de variáveis e da relação entre elas nos dois eixos perpendiculares. Bryant e Somerville (1986), por exemplo, concluíram que essa noção de projeção pode ser identificada em crianças mais jovens. Esses autores realizaram um estudo experimental com 60 participantes de 6 a 7 anos de idade, para investigar se eles seriam capazes de fazer os julgamentos espaciais necessários para relacionar dois eixos perpendiculares em um gráfico de linhas.

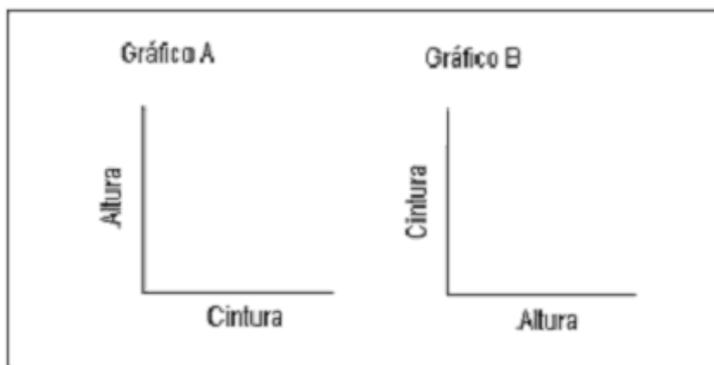
Nesse estudo, os gráficos eram apresentados às crianças em três condições experimentais: eixo-para-eixo, em que uma posição era dada num eixo (horizontal ou vertical), e as crianças eram solicitadas a encontrar a posição correspondente no outro eixo; eixo-para-linha, em que, dado um valor nos eixos horizontal ou vertical, elas estimavam ou extrapolavam um ponto na linha projetada; linha-para-eixo: dado um valor na linha projetada, deveriam marcar com um lápis a posição correspondente nos eixos horizontal ou vertical. Em geral, as crianças mostraram razoável acuidade na realização das tarefas envolvendo as três condições experimentais. Segundo Bryant e Somerville (1986), crianças nessa faixa etária já possuem as habilidades para compreender que um ponto ou uma linha se relacionam à projeção dos dois eixos perpendiculares num gráfico.

Todavia, entre estudantes de uma faixa etária maior, haveria a expectativa de que, além da habilidade em compreender essa projeção entre dois eixos, eles

deveriam, também, assimilar as relações entre as variáveis. Examinando o desempenho de estudantes de 11 a 13 anos de idade na interpretação de gráficos de linhas e de barras, Swatton e Taylor (1994) oferecem uma descrição das dificuldades dos alunos. As tarefas do estudo incluíam diferentes demandas, que os autores classificaram como: concretas (ex. leitura de um número ou localização de um ponto); semiconcretas (ex. localizar variações e tendências) e abstratas (ex. extrapolar e descrever as relações entre as variáveis). As questões concretas foram mais facilmente interpretadas do que as questões abstratas. Os autores concluíram que é difícil para os estudantes dar uma resposta verbal para as questões abstratas.

Segundo a perspectiva de alguns estudiosos, como Kerslake (1981), a nomeação e a representação das variáveis são aspectos que podem dificultar a interpretação de gráficos. Por exemplo, convencionalmente, o eixo vertical e o eixo horizontal dos gráficos representam, respectivamente, as variáveis dependentes e independentes do problema. Não existe, no entanto, uma razão para que essa convenção na representação seja seguida, e nem sempre se adota esse rigor quando os gráficos são usados para apresentar as variáveis de um problema.

Kerslake (1981) aplicou testes em estudantes de 12 a 15 anos para averiguar a habilidade de interpretação de gráficos. Em um dos problemas utilizados, os estudantes precisavam analisar a relação entre altura e cintura, para descrever a possível aparência das pessoas. A Figura 1 (abaixo) apresenta os gráficos baseados naqueles usados por Kerslake.



**Figura 1** – Disposição convencional e não convencional das variáveis em gráficos semelhantes aos usados por Kerslake (1981, p. 127).

No gráfico A, as variáveis estão representadas convencionalmente (altura

no eixo vertical e cintura no eixo horizontal); enquanto, no gráfico B, as variáveis estão representadas não convencionalmente (altura no eixo horizontal e cintura no eixo vertical). A autora observou que os estudantes interpretavam com facilidade o gráfico A (convencional), mas falhavam ao interpretar o gráfico B (não convencional). Kerslake sugere que os estudantes foram iludidos pela forma do gráfico, porque, em representações gráficas convencionais, a variável altura geralmente é medida no sentido vertical.

Nós argumentamos que, nas tarefas de pesquisa de Kerslake (1981), as variáveis altura e cintura são apresentadas explicitamente no gráfico; no entanto, a questão proposta introduz de maneira implícita uma terceira variável, que é a aparência das pessoas. Problemas em que os estudantes precisam relacionar duas variáveis e realizar inferências sobre a terceira variável, que está implícita no problema, exigem um tipo de raciocínio mais complexo.

Além disso, no gráfico A os alunos podem realizar um julgamento visual, a partir de uma intuição de que o ponto (elemento formal da estrutura do gráfico) corresponderia à medida da altura da pessoa. Ou seja, poderia haver uma associação com a situação concreta de medir a altura de uma pessoa. Porém, no gráfico B, os estudantes não poderiam utilizar-se dessa forma de raciocínio intuitivo, uma vez que a variável representada no eixo vertical seria a medida da cintura. No gráfico B, portanto, os estudantes precisariam usar um raciocínio conceitual, relacionando as duas variáveis do problema.

### **3 Dificuldades conceituais**

Neste artigo, propomo-nos a uma análise conceitual das dificuldades na interpretação de gráficos realizada por estudantes. Essa análise baseia-se na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1983), segundo a qual problemas com mais de uma variável pertencem ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, podendo ser, principalmente, de dois tipos: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

Nos problemas de isomorfismo de medidas, os estudantes devem relacionar duas variáveis. Tais problemas envolvem proporção direta simples entre as variáveis e incluem muitas situações do dia a dia, como é o caso das relações entre mercadorias compradas e seu custo.

Os problemas de três ou mais variáveis são denominados produtos de medidas e consistem da “composição de dois espaços de medidas,  $M_1$  e  $M_2$ , em um terceiro,  $M_3$ ” (VERGNAUD, 1983, p. 134). Segundo Nunes, Desli e Bell (2003), a classe de problemas de produto de medidas é mais complexa do

que a classe de isomorfismo de medidas, pois a primeira possui uma estrutura que envolve a proporção dupla.

Os problemas de produto de medidas podem ser idealmente representados em tabelas ou gráficos. Particularmente nos gráficos, duas variáveis podem ser representadas em dois eixos distintos, enquanto a relação entre elas, isto é, a terceira variável, seria representada por pontos ou barras num plano. Nesses problemas, os estudantes precisam relacionar as duas variáveis e realizar inferências sobre a terceira, que não está dada no problema, pois se encontra implícita.

Vergnaud não analisa se o tipo de relação em problemas de produto de medidas afeta o tipo de inferência que os estudantes precisam construir. Esse aspecto foi analisado por estudiosos preocupados com o desenvolvimento conceitual do produto de medidas, entre os quais, Nunes, Desli e Bell (2003).

#### **4 Inferências diretas e inversas**

Estudos que investigam o desenvolvimento conceitual do produto de medidas focalizam a dificuldade dos estudantes em realizar inferências na resolução de problemas de três variáveis em que a terceira variável está numa relação inversa com as outras duas. Um aspecto central nesses estudos é que o reconhecimento dos estudantes sobre como as variáveis estão relacionadas não é apenas um passo qualitativo na resolução dos problemas, mas uma parte essencial na sua compreensão.

Nunes, Desli e Bell (2003) oferecem evidências de que as dificuldades que crianças pequenas apresentam para entender quantidades intensivas estão relacionadas com o seu entendimento de relações inversas. Nesse estudo, crianças de 6 a 8 anos resolveram problemas cujas terceiras variáveis eram, entre outras: paladar, velocidade e custo. Os problemas não requeriam que as crianças realizassem uma computação; além disso, foram apresentados por meio de desenhos, para facilitar a comunicação.

Questões diretas ou inversas foram elaboradas para fazer referências a uma ou outra variável do mesmo problema. Por exemplo, numa situação em que se apresentavam, por meio de desenho, dois copos iguais, contendo uma mesma quantidade de suco de limão e diferentes quantidades de açúcar, Nunes, Desli e Bell (2003) perguntavam às crianças se um copo de suco está mais doce do que o outro ou eles têm o mesmo sabor? As crianças respondiam com facilidade a esse tipo de questão, porque estabeleciam uma relação direta entre o copo de suco com maior quantidade de açúcar como o mais doce. Dessa maneira, as

crianças compreendiam que o gosto do suco estava diretamente relacionado à quantidade de açúcar. Considerando essa mesma situação, apresentavam às crianças dois copos iguais, contendo diferentes quantidades de suco de limão com a mesma quantidade de açúcar, e perguntava se um copo de suco tinha um sabor mais forte do que o outro ou se eles tinham o mesmo sabor? Os resultados indicaram que crianças de diferentes idades tiveram mais dificuldades em resolver esse segundo tipo de questão, porque demandava o estabelecimento de uma relação inversa, pois, quanto menos suco, mais doce seria o sabor.

Essa forma de abordagem de manipulação das relações entre variáveis na mesma situação problema não tem sido investigada de modo sistemático em estudos sobre interpretações de gráficos. Entendemos que o tipo de inferência, direta ou inversa, encontra-se associado não apenas a fatores gráficos, mas também aos aspectos conceituais da informação.

Nos estudos relatados em seguida, analisamos uma hipótese sobre a influência desses aspectos conceituais da informação que requerem dos estudantes o estabelecimento de inferências diretas ou inversas.

## 5 Metodologia

Conforme anunciamos anteriormente, discutiremos dois estudos desenvolvidos durante o processo de doutoramento da primeira autora deste artigo. As escolhas metodológicas foram relacionadas à sua participação no grupo de pesquisa da Oxford Brookes University. A pesquisadora coletou dados para seus estudos em escolas públicas da região, as quais se dispuseram a envolver-se na pesquisa. Assim, nos dois estudos aqui reportados, participaram 270 estudantes, oriundos de quatro escolas públicas da Inglaterra, localizadas no Distrito de Oxfordshire, especificamente em Oxford, Holton e Kidlington.

Os procedimentos de pesquisa nas escolas foram conduzidos de acordo com as normas sobre ética em pesquisa estabelecidas pela Oxford Brookes University. Após a aprovação de tais procedimentos pelo Comitê de Ética da Universidade, a pesquisadora enviou por *e-mail* uma carta aos professores coordenadores do Ensino Fundamental de várias escolas, explicando os objetivos da pesquisa e solicitando o consentimento para a realização da coleta de dados. As escolas interessadas responderam o *e-mail* e agendaram um contato inicial entre pesquisadora e professores de Matemática, em que foram explicados mais detalhadamente os objetivos da pesquisa e os critérios necessários para a coleta de dados, como faixa etária dos alunos, procedimentos e tempo requerido. Os professores colocaram-se como colaboradores no processo de pesquisa,

agendando os momentos de coleta de dados.

Após os professores apresentarem a pesquisadora ao grupo-classe, esta estabelecia uma conversa inicial com os alunos, a fim de proporcionar breve descontração e introduzir os propósitos da sua pesquisa e das tarefas que eles iriam realizar em seguida.

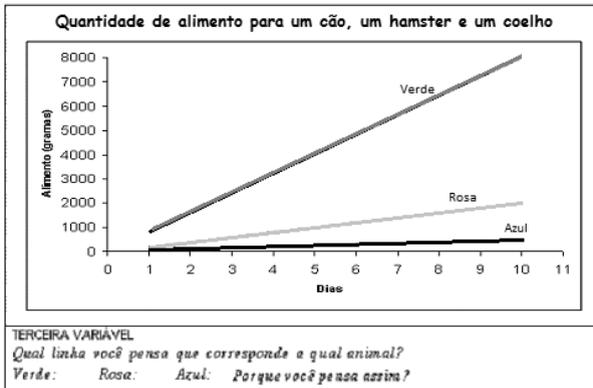
Para cada experimento realizado, os estudantes recebiam um caderno de respostas impresso, onde eles eram solicitados a escrever suas respostas e justificativas. A primeira página continha um espaço para os estudantes registrarem informações sobre seu ano na escola, nome da escola, idade, data de nascimento e gênero. Para cada grupo-classe foi necessária apenas uma sessão de coleta de dados, que, em média, tinha a duração de 50 minutos.

As escolas que participaram da pesquisa são bem equipadas e as salas de aula possuem computadores, projetores, quadro branco e muitos livros. As paredes possuem ilustrações sobre alguns aspectos dos conteúdos matemáticos trabalhados e também quadros mostrando algumas produções dos alunos em tarefas de casa ou realizadas em sala de aula. Cada área do conhecimento (Ciências Exatas, Linguagem, Ciências Humanas) possui uma sala específica para onde os alunos se deslocam nos horários estabelecidos pela escola. A jornada escolar tem início às 9h da manhã e término às 15h10min.

## 5.1 Estudo 1

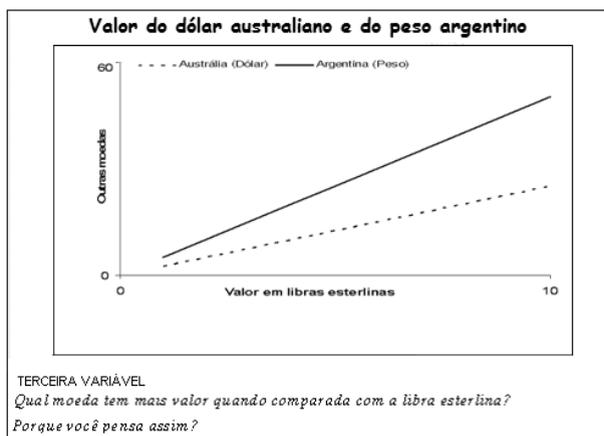
O objetivo do estudo foi explorar o efeito do tipo de inferência na interpretação de gráficos. Participaram do estudo 84 estudantes dos *Years* 7, 8 e 9, correspondentes, em termos de idade, aos 7º, 8º e 9º anos da Educação Básica no Brasil. Esses estudantes são oriundos da escola inglesa situada em Oxford, e suas idades variaram de 11,2 a 14,1 anos, com uma média de idade de 12,8 e 0,88 de desvio-padrão. A amostra foi composta por 41 garotos (48,8%) e 43 garotas (51,2%). Um computador do tipo *notebook* e um projetor foram usados para apresentar os gráficos aos estudantes. Enquanto analisavam os gráficos projetados na tela, os estudantes ouviam a leitura das questões e, em seguida, respondiam individualmente nos seus cadernos de respostas.

Os estudantes foram solicitados a resolver quatro problemas: dois de interpretação e dois de construção. As Figuras 2 e 3 (abaixo) mostram os gráficos apresentados aos estudantes nos problemas de interpretação.



**Figura 2** – Problema de interpretação com inferência direta.

Observamos, no gráfico da Figura 2, a relação entre a quantidade de comida ( $y$ ) ingerida por três diferentes animais em 10 dias ( $x$ ); no entanto, a questão perguntada (Que linha você pensa que corresponde a qual animal?) introduz a terceira variável, que é a correspondência entre o tipo de animal e as linhas do gráfico. Essa correspondência não está dada na figura; o estudante vai precisar construí-la com base em inferências entre a terceira variável e a linha projetada no gráfico. Nesse caso, a que tem a inclinação mais acentuada é diretamente relacionada à pergunta realizada; logo, quanto maior a inclinação da linha, maior será o porte do animal que ela representa. Trata-se de um caso de inferência direta entre a terceira variável e o gráfico.



**Figura 3** – Problema de interpretação com inferência inversa.

O gráfico da Figura 3, acima, mostra que 10 libras valeriam aproximadamente 50 pesos argentinos e menos de 30 dólares australianos. Assim, as linhas do gráfico representariam a valorização da libra em relação às outras duas moedas. Quanto menor fosse o valor de 10 libras numa determinada moeda, maior seria a valorização desta em relação à Libra. A linha mais inclinada no gráfico representaria a moeda que é mais desvalorizada em relação à Libra, isto é, o Peso Argentino.

Durante as sessões de pesquisa, os estudantes também foram solicitados a realizar dois problemas de construção. A partir do gráfico da Figura 3, os estudantes foram informados que o Rublo usado na Rússia tinha menos valor que o Peso Argentino. Com base nessa informação, lhes foi solicitado desenhar uma linha num gráfico do seu caderno de respostas que representasse o Rublo. Na construção da linha representando o Rublo, o aluno precisaria compreender que, se o Rublo é mais desvalorizado que o Peso Argentino em relação à Libra Esterlina, então, a linha correspondente a essa moeda deveria estar acima da linha que representa o Peso Argentino.

No problema de construção com inferências diretas, os estudantes deveriam desenhar a linha projetada, baseados na seguinte informação: Imagine que uma planta cresceu na mesma proporção por cinco semanas; desenhe o gráfico para mostrar o crescimento da planta.

Os resultados obtidos neste estudo serão apresentados a partir das dificuldades dos estudantes nos problemas de tipos inferenciais: na interpretação dos gráficos e, em seguida, na construção dos gráficos.

### **5.1.1 Dificuldades de problemas de tipos inferenciais na interpretação de gráficos**

A maioria dos estudantes (7º ano = 62,5%, 8º ano = 93,1% e 9º ano = 96,8%) resolveu corretamente o problema do gráfico da Figura 2. As estratégias adotadas por eles para compreender esse problema consistiram em associações entre o tamanho do animal e a inclinação da linha, conforme exemplos descritos em seguida:

Verde para o cão porque é a linha mais alta. Rosa para o coelho porque essa linha vem em seguida. Azul para o hamster, porque essa é a linha menos inclinada (aluno do 8º ano).

Porque o cachorro é maior, logo ele vai comer mais. O coelho é maior que o hamster, logo ele vai comer mais. Cachorro>coelho>hamster (aluno do 9º ano).

Porque o hamster é o menor de todos, e o cachorro é o maior, logo o coelho está entre eles (aluno do 7º ano).

Menos que 50% dos estudantes (7º ano = 33,3%, 8º ano = 34,5% e 9º ano = 48,4%) resolveram o problema mostrado no gráfico da Figura 3. As estratégias adotadas pelos alunos para compreender esse problema consistiram na análise visual ou numérica das relações entre as variáveis, como revelam os exemplos seguintes:

O dólar australiano, porque a linha mostrando o dólar é menor que a do peso (aluno do 7º ano).

O dólar australiano, porque no final do gráfico ele está mais próximo da libra do que o peso (aluno do 8º ano).

O dólar australiano tem mais valor, porque você obtém mais libras com menos dólares (aluno do 9º ano).

Uma estratégia comum entre os que erraram o problema foi considerá-lo como um problema direto, analisando visualmente ou numericamente a relação entre as variáveis, conforme pode ser constatado nos exemplos que seguem.

O peso argentino, porque a linha no gráfico envolve números maiores do que o dólar (aluno do 7º ano).

O peso argentino, porque ele vai mais alto no gráfico; logo, ele vale mais dinheiro (aluno do 8º ano).

O peso argentino tem mais valor, porque a linha é mais alta; logo, ela provavelmente vale mais (aluno do 9º ano).

### **5.1.2 Dificuldades de problemas de tipos inferenciais na construção de gráficos**

Apenas um quarto dos estudantes (25%) resolveu corretamente o problema, envolvendo construção de gráfico sobre inferência inversa. Nesse problema, deveriam desenhar a linha projetada, baseados na seguinte informação: a moeda russa, o Rublo, é mais valiosa que o Peso Argentino. Uma estratégia frequentemente adotada pelos estudantes que erraram o problema consistiu em traçar uma linha abaixo daquela que representa o peso argentino no gráfico.

A maioria deles (86,9%) resolveu corretamente o problema de construção direta do gráfico. Nesse problema, deveriam desenhar a linha projetada que representasse o crescimento da planta na mesma proporção durante cinco

semanas. A estratégia adotada por alguns estudantes consistiu em marcar pontos coordenados e, em seguida, traçar a linha do gráfico, enquanto outros preferiram traçar a linha diretamente, apenas estimando os pontos coordenados. Neste último tipo de estratégia, alguns traçados apresentaram imprecisões.

### 5.1.3 Discussão de resultados do Estudo 1

O tipo de inferência apresentada constituiu importante fator para prever o nível de dificuldade dos estudantes: o problema de inferência direta foi mais facilmente resolvido pelos estudantes do que o de inferência inversa. As dificuldades dos estudantes com as questões inversas foram mantidas, mesmo quando os problemas envolviam a construção de gráficos. Esses resultados confirmam as conclusões obtidas por Nunes, Desli e Bell (2003), que examinaram o problema com crianças menores e a partir de outras formas de representação das tarefas.

Percebemos que os especificadores do gráfico (linhas projetadas) levaram os estudantes a utilizar estratégias visuais, associando, por exemplo, o tamanho dos animais à altura das linhas, como na interpretação do gráfico da Figura 2. Tais estratégias podem ser consideradas uma evidência do uso de regras intuitivas, pois, em situações de comparação de quantidades, elas podem ser suscitadas pelos aspectos representacionais da tarefa, como afirmam Stavy e Tiroshi (2000).

Percebemos, também, que o uso de regras intuitivas não foi suficiente para os estudantes resolverem os problemas de interpretação e construção do gráfico do valor de moedas, pois, nesses problemas, eles precisariam ir além das estratégias visuais e analisar a forma como as variáveis estão relacionadas, abordando o problema numa perspectiva conceitual.

Neste Estudo 1, os dois gráficos de linhas, introduzidos para analisar os problemas, apresentaram diferentes conteúdos: consumo de alimento e valor monetário. Conjeturamos até que ponto as dificuldades dos estudantes para formular inferências sobre o gráfico do valor de moedas poderiam ser explicadas com base em dúvidas sobre o conteúdo do gráfico. Uma análise mais detalhada sobre a origem das dificuldades nas relações inversas precisa incluir um controle sobre o conteúdo do problema. No Estudo 2, descrito em seguida, esse aspecto da interpretação de gráficos foi controlado experimentalmente.

Ainda, no que se refere aos procedimentos de análise de dados do Estudo

1, enfatizamos que, por ser ele um estudo exploratório, buscamos identificar a existência de efeitos do tipo de inferência na interpretação dos gráficos e optamos por uma análise qualitativa e frequencial das respostas dos estudantes. Por outro lado, no Estudo 2, por haver evidências do efeito do tipo de inferências, escolhemos o uso de uma abordagem estatística para identificar diferenças significativas entre as médias de acertos dos alunos nas situações de pesquisa. Nas comparações, tomamos como parâmetro o valor de  $p < 0,05$  para a determinação das diferenças estatisticamente significativas.

## 5.2 Estudo 2

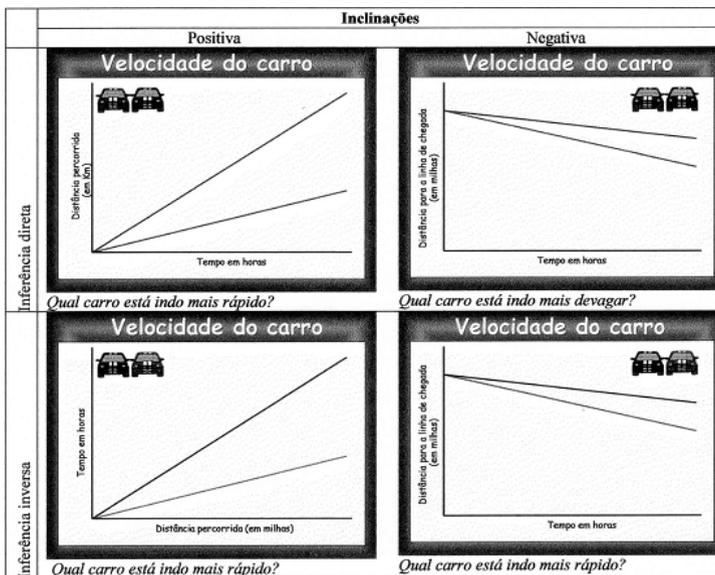
O objetivo deste estudo foi investigar, mais detalhadamente, as dificuldades dos estudantes em interpretar problemas de inferências inversas apresentadas por meio de gráficos de linhas. Participaram estudantes de escolas inglesas dos *Years 7* e *9*, que correspondem, em idade, aos 7º e 9º anos do Ensino Fundamental no Brasil. Essa escolha ocorreu, em parte, para aumentar a probabilidade dos efeitos da idade ou da escolarização.

As escolas envolvidas neste Estudo 2 estavam situadas nos bairros de Cowley e Kidlington, em Oxford, e no vilarejo Holton, em Oxfordshire. Ao todo foram 186 estudantes, 86 garotos e 100 garotas, com idades que variaram de 11,7 a 14,8 anos, com média de idade de 13,2 anos e 1,07 de desvio-padrão.

Em cada grupo-classe no qual era realizada a coleta de dados, eram entregues, de forma randômica, dois tipos de tarefas aos estudantes: uma composta por dez problemas, apresentados em gráficos de linhas com a inclinação positiva; e outra constituída por dez problemas, apresentados em gráficos de linhas com a inclinação negativa. A terceira variável foi introduzida por meio de uma questão de comparação e caracterizou-se por não incidir diretamente sobre as duas variáveis identificadas nos eixos perpendiculares  $x$  e  $y$ . Por exemplo: as variáveis apresentadas no gráfico eram distância e tempo, enquanto a pergunta era sobre a velocidade.

Neste segundo estudo, elaboramos problemas envolvendo cinco tipos de conteúdos diferentes, quais sejam: velocidade; valor monetário; custo; consumo de gasolina; e programas de abstinência ao uso de drogas. Esses

conteúdos foram controlados pelos tipos de inclinação (positiva ou negativa) e de inferências (direta ou inversa). O Quadro 1 mostra um exemplo da combinação ortogonal aplicada aos gráficos neste estudo.



**Quadro 1** – Exemplo da variação ortogonal aplicada às tarefas

Conforme Quadro 1, embora seja possível variar a apresentação das informações das tarefas de pesquisa, combinando inclinações positivas ou negativas das linhas com problemas de inferências diretas ou inversas, a discussão aborda as mesmas três variáveis – distância, tempo e velocidade – para cada uma das possibilidades. Esse mesmo método foi utilizado para elaborar os problemas em todos os conteúdos das tarefas.

Portanto, os problemas combinaram, ortogonalmente, inclinações positivas e negativas com inferências diretas ou inversas, produzindo quatro combinações de problemas gráficos para cada conteúdo abordado: inclinação positiva - inferência direta; inclinação positiva - inferência inversa; inclinação negativa - inferência direta; e inclinação negativa - inferência inversa. A ordem de apresentação dos problemas foi equilibrada, usando o método do Quadrado Latino.

Dois tipos de cadernos de respostas – um, apresentando gráficos com

inclinação positiva; e outro, gráficos com inclinação negativa – foram impressos em folhas de papel A4 e distribuídos entre os alunos. Os estudantes responderam os problemas, individualmente, durante uma aula de matemática com duração de 50 minutos.

A Tabela 1 apresenta as médias do percentual de acertos nos problemas de inferências diretas e inversas para cada tipo de inclinação das linhas, positiva ou negativa.

**Tabela 1** – Médias do percentual de acertos dos estudantes por tipo de problemas

| <b>Problemas</b>                          | <b>Médias</b> |
|-------------------------------------------|---------------|
| 1. Inclinação positiva-inferência direta  | 62,1          |
| 2. Inclinação positiva-inferência inversa | 52,4          |
| 3. Inclinação negativa-inferência direta  | 62,0          |
| 4. Inclinação negativa-inferência inversa | 44,0          |

Os alunos que responderam às perguntas diretas (tanto com inclinação positiva quanto negativa) apresentaram maiores médias, com os respectivos valores de 62,1% e 62%. Nas questões inversas os alunos apresentaram médias menores: 52,4% para inclinação positiva e 44% para inclinação negativa. A ANOVA de medidas repetidas identificou diferença estatisticamente significativa entre os tipos de problemas ( $F = 9,53$  para  $p = 0,001$ ).

Antes das comparações múltiplas entre médias, realizamos o teste de Levene, para identificar a existência de homogeneidade de variância. O valor do teste foi de 1,79 para  $p = 0,11$ , com a presença da homogeneidade de variância. O teste de comparação múltipla de Scheffé identificou a média de percentual de acertos dos estudantes nos problemas do tipo 1 (inclinação positiva - inferência direta), diferindo, significativamente, apenas dos problemas do tipo 4 (inclinação negativa - inferência inversa). A média do percentual de acertos dos estudantes nos problemas do tipo 4 (inclinação negativa - inferência inversa) difere dos problemas do tipo 1 (inclinação positiva - inferência direta) e do tipo 3 (inclinação negativa - inferência direta). Verificamos que a pergunta inversa contribui para uma média baixa de acertos, que sofre aumento, quando a questão se associa a uma inclinação negativa.

Ao analisar as médias de acertos relacionadas às tarefas cujos gráficos apresentavam inclinação positiva ou negativa, organizamos esses resultados de acordo com a escolaridade dos alunos, para que fosse possível compará-los de duas maneiras:

(1) uma comparação intergrupos que, pelo Teste-t de amostras independentes, revelou a existência de diferenças significativas entre os anos escolares em cada combinação de problemas;

(2) uma comparação intragrupos, em que foi realizada uma ANOVA de medidas repetidas, para verificar se as médias das quatro combinações de problemas dentro de cada ano escolar apresentavam diferenças significativas.

Na comparação intergrupos, em todos os tipos de problemas, os alunos do 9º ano apresentaram maiores médias que os alunos do 7º ano. Nos problemas de inclinação positiva e inferências diretas, os estudantes do 7º ano tiveram média de 53,0% e os do 9º ano, 71,7%; essa diferença foi significativa para  $t = -4,33$  e  $p = 0,001$ . As médias dos 7º e 9º anos escolares, nos problemas de inclinação negativa e inferência direta, foram, respectivamente, 55,3% e 71,4%, com diferença significativa para  $t = -2,92$  e  $p = 0,005$ . Por último, nos problemas de inclinação negativa e inferência inversa, o 7º ano teve média de 31% de acertos e o 9º ano, de 62,3% de acertos, com diferença significativa para  $t = -6,57$  e  $p = 0,001$ .

Ao comparar os valores das médias do percentual de acertos entre os dois anos escolares, observamos, entre os alunos do 9º ano, maiores médias de acertos em todas as combinações de problemas. Também verificamos tendência de maiores médias de acertos nas questões de inferências diretas do que nas questões de inferências inversas.

Dessa forma, podemos afirmar que os alunos dessa amostra possuem maior dificuldade em resolver os problemas que envolvem as questões inversas, dificuldade realçada nas respostas dos alunos do 7º ano às questões que, além de requererem inferências inversas, tinham uma inclinação negativa.

Na comparação intragrupos os alunos do 7º ano obtiveram maiores médias de acertos nos problemas de inferências diretas, independentemente do tipo de inclinação da linha. Na resolução dos problemas inversos, em particular naqueles de inclinação negativa com inferência inversa, esses alunos foram os que apresentaram as menores médias. A ANOVA de medidas repetidas encontrou diferença estatisticamente significativa entre as médias para  $F = 10,66$  e  $p = 0,001$ .

O teste de Levene indicou não existir homogeneidade de variâncias ( $L = 3,56$  para  $p = 0,01$ ). Em consequência disso, utilizamos o teste de comparações múltiplas de Tamhane, que identificou diferenças significativas entre os seguintes pares de médias: inclinação positiva - inferência direta e inclinação negativa - inferência inversa; inclinação positiva - inferência inversa e inclinação negativa - inferência inversa; e inclinação negativa - inferência direta e inclinação negativa - inferência inversa.

De maneira similar aos resultados obtidos entre os alunos dos grupos do 7º ano, analisando as médias de acertos do 9º ano, verificamos que estes alunos também obtiveram maiores médias de acertos nas questões diretas, independentemente do tipo de inclinação da linha.

Para a comparação estatística das médias desta segunda turma, utilizamos a ANOVA, que identificou a existência de pelo menos uma diferença significativa ( $F = 3,31$  para  $p < 0,03$ ). O teste de Levene informou não existir homogeneidade de variâncias ( $L = 3,31$  para  $p = 0,02$ ). Em virtude desse fato, utilizamos o teste Tamhane para as comparações múltiplas. Somente nos grupos que responderam os problemas com gráficos, apresentando inclinação positiva com inferências diretas ou inversas, foi encontrada uma diferença estatisticamente significativa de médias. O grupo que respondeu as questões de inclinação positiva-inferência inversa apresentou a menor média, resultado esse contrário ao do 7º ano, mas que não foi significativo.

### **5.2.1 Discussão de resultados do Estudo 2**

O tipo de inferência configura-se um importante fator para prever o nível de dificuldade dos estudantes na interpretação de gráficos de linhas.

Os problemas de inferência direta foram mais facilmente resolvidos dos que os de inferência inversa, sendo a maior dificuldade observada na combinação inclinação negativa e inferência inversa para os estudantes do 7º ano. Esses resultados ratificam as conclusões do primeiro estudo e realçam um possível uso de regras intuitivas (STAVY; TIROSHI, 2000) e dificuldades com o conceito de produto de medidas (NUNES; DESLI; BELL, 2003).

Os estudantes do 7º ano apresentaram mais dificuldade em entender os problemas de dupla inversão: inferência inversa combinada com situações de inclinação negativa, o que sugere que o estabelecimento de inferências inversas requer interações dos aspectos visuais e conceituais do problema, precisando ser elaborado pelos estudantes no processo interpretativo. Esse processo parece configurar-se como uma aquisição que se desenvolve ao longo da escolaridade.

## **6 Considerações conclusivas**

O objetivo dos estudos discutidos foi investigar o efeito de problemas que envolvem inferências diretas e inversas na interpretação de gráfico de linhas por estudantes de 11 a 14 anos. Para essas amostras, os estudos sugerem que estudantes apresentam dificuldades na interpretação de gráficos de linhas que requerem o uso de inferências inversas. Inferências diretas foram mais facilmente compreendidas por eles, pois foram baseadas principalmente em leituras visuais.

No segundo estudo, observamos a dificuldade com problema de inferência inversa em gráficos com a inclinação negativa, particularmente entre estudantes do 7º ano. Gráficos de linhas com inclinação negativa consistem em forma convencional de representar, na Matemática, as relações inversas. Nessas situações, os alunos precisam estabelecer interações entre os fatores visuais dos gráficos e os tipos de variáveis. Os dados relativos aos gráficos de linhas requerem uma habilidade que precisa ser mais bem trabalhada, pois exige raciocínio, além dos aspectos visuais da informação.

Como o uso de gráficos de linhas é mais convencionalmente voltado para apresentar problemas diretos, a percepção dos estudantes pode já estar automatizada para uma interpretação desse tipo de situação. No entanto, nessa forma de uso não existe a garantia de que os estudantes, de fato, estejam integrando os fatores visuais e conceituais.

Nesse sentido, a percepção sobre gráficos não pode ser apenas concebida como uma reação fisiológica a um estímulo externo, mas como parte de uma análise conceitual em que a escolaridade e o tipo de problema assumem importância.

Reconhecemos que os estudos aqui discutidos referem-se a realidades educacionais específicas. Dessa maneira, estamos desenvolvendo um projeto de pesquisa no qual realizamos uma abordagem semelhante com estudantes brasileiros. Essa pesquisa, em andamento, possibilitará uma análise comparativa entre os dados de escolas inglesas com brasileiras. Além disso, as análises dos dados provenientes de realidades escolares brasileiras poderão contribuir para fundamentar abordagens pedagógicas que possibilitem aos alunos integrar aspectos conceituais e visuais na interpretação de gráficos de linhas e superar possíveis dificuldades com inferências inversas.

## Referências

BIDERMAN, A. **The Playfair Enigma**: toward understanding the development of the schematic representation of statistics from origins to the present day. Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, University of Bielefeld, 1989.

BRASIL. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 1º e 2º ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF, 1998.

BRYANT, P.; SOMERVILLE, S. The spatial demands of graph. **British Journal of Psychology**, London, GB, n. 77, p. 187-197, May 1986.

CARVALHO, L. M. T. L. **O papel dos artefatos na construção de significados matemáticos por estudantes do Ensino Fundamental**. 2008, 239 f. Tese (Doutorado em Educação) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2008.

CARVALHO, L. M. T. L.; MONTEIRO, C. E. F.; CAMPOS, T. M. M. Refletindo sobre a interpretação de gráficos como uma atividade de resolução de problemas. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOU, S. A. (Orgs.). **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 213-227.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V.; SILVA, V. Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOU, S. A. (Orgs.). **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 19-44.

DES. **Mathematics in the National Curriculum**, London: HMSO, 1989.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

GAL, I. Adult statistical literacy: meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review**, The Hague, v. 70, n. 1, p. 1-25, abr, 2002.

KERSLAKE, D. Graphs. In: HART, K. (Ed.), **Children's understanding of mathematics 11-16**. Oxford: John Murray, 1981. p. 120-136.

KOSSLYN, S. **Elements of graph design**. New York: Freeman, 1994.

LIMA, L. M. T. **Interpretação de gráficos de quantidades veiculados pela mídia impressa: um estudo exploratório**. 1998, 160 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia do Centro de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1998.

MONTEIRO, C. E. F. **Interpretação de gráficos sobre economia veiculados pela mídia impressa**. 1998, 133 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Departamento de Psicologia do Centro de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1998.

MONTEIRO, C. E. F. **Investigating critical sense in the interpretation of media graphs**. 2005, 228 f. Tese (PhD in Education) – Institute of Education, University of Warwick, Coventry, Inglaterra, 2005.

MONTEIRO, C.; SELVA, A. Investigando a atividade de interpretação de gráficos entre Professores do ensino fundamental. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO – ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2001. CD-ROM.

NUNES, T.; DESLI, D.; BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, Orlando, n. 39, p. 651-675, 2003.

STAVY, R.; TIROSHI, D. **How students (mis-)understanding science and mathematics**. New York: Teachers College Press, 2000.

SWATTON, P.; TAYLOR, R. M. Pupil performance in graphical tasks and its relationship to the ability to handle variables. **British Educational Research Journal**, London, v. 20, n. 2, p. 227-243, 1994.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.), **Acquisition of mathematics concepts and process**. London: Academic Press, 1983. p. 128-175.

WAINER, H. Understanding graphs and tables. **Educational Researcher**, Washington, v. 21, n. 1, p. 14-23, jan./fev. 1992.

ZIEFFLER, A.; et. al. A framework to support research on informal inferential reasoning. **Statistics Education Research Journal**, Vooburg, v. 7, n. 2, p. 40-58, nov. 2008. Disponível em: <[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7\(2\)\\_Zieffler.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ7(2)_Zieffler.pdf)>. Acesso em: 21 jan. 2010.

**Submetido em Junho de 2010.  
Aprovado em Novembro de 2010.**