

Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico

Mathematical Modeling and the Teaching of Adjustment Function: a pedagogical handbook

Rudolph dos Santos Gomes Pereira*
Guataçara dos Santos Júnior**

Resumo

Este artigo apresenta um projeto desenvolvido com alunos formandos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná, como parte integrante dos resultados de uma pesquisa do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Ponta Grossa, cujo objeto de estudo é o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática. Ao longo do desenvolvimento da atividade pôde-se perceber a interação dos alunos com os demais e com o problema sugerido, tendo em vista que este retratava uma situação real bem como a (re)produção de conhecimentos matemáticos. No final do projeto, percebeu-se que a Modelagem Matemática, como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, pode contribuir para o aprendizado de conceitos matemáticos e elaborou-se um Caderno Pedagógico que contém a atividade desenvolvida para ser utilizada por outros professores do Ensino Superior na contextualização de conceitos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Ajuste de funções.

* Mestre em Ensino de Ciências e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal Paraná (UTFPR). Docente da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Cornélio Procópio, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Portugal, 340, Centro, CEP: 86300-000, Cornélio Procópio, PR, Brasil. *E-mail:* rudolph.matematica@gmail.com.

** Doutor em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Ponta Grossa, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Monteiro Lobato, s/n, Km 04, CEP: 84016-210, Ponta Grossa, PR, Brasil. *E-mail:* guata@utfpr.edu.br.

Abstract

This article presents partial results of a survey conducted with senior undergraduate mathematics students at the State University of Northern Paraná. It composes part of a Professional Masters research project in the Teaching of Science and Technology at the Federal Technological University of Paraná, Ponta Grossa campus, focusing on the use of mathematical modeling as a teaching strategy and learning of Mathematics. Throughout the development of the activity, we could see the students' interaction with others and with the problem proposed, which portrayed a real situation and the (re)production of mathematical knowledge. Findings suggest that mathematical modeling, as a strategy for teaching and learning of mathematics, can contribute to the learning of mathematical concepts. A Pedagogical Handbook containing the activity was developed for use by other university-level teachers.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Adjustment Functions.

1 Introdução

O presente trabalho apresenta um Caderno Pedagógico direcionado aos professores de Matemática que atuam no curso de licenciatura em Matemática. O objetivo do Caderno é apoiar professores interessados em utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de ajuste de funções, ou, ainda, em outros conteúdos pertencentes à matriz curricular do referido curso. Assim, a atividade apresentada procura demonstrar a potencialidade da Modelagem Matemática na introdução, exemplificação e aplicação dos conteúdos matemáticos aprendidos em sala de aula por meio de problemas reais.

O Caderno Pedagógico contempla conhecimentos sobre estratégias de ensino e aprendizagem que permitam associar os conteúdos matemáticos às atividades extramatemáticas pertencentes a outras áreas do conhecimento. Também, serve como material de apoio a professores da Educação Básica, pois descreve a atividade desenvolvida, define a Modelagem Matemática e seu processo e apresenta dados coletados que possibilitam a obtenção de modelos matemáticos diferentes para a mesma situação-problema. Além disso, permite aos alunos do curso de licenciatura compreender que a Modelagem Matemática pode ser utilizada para contextualizar o conteúdo de ajuste de função àqueles pertencentes à Educação Básica, pois, quando da sua atuação enquanto professores, podem fazer o uso de tal estratégia de ensino e aprendizagem independentemente do nível em que lecionarão.

Intitulado *A Modelagem Matemática na calibração de micrômetros*:

uma estratégia de ensino e aprendizagem para ajuste de funções, o caderno foi apresentado, anteriormente, em um minicurso realizado para professores na cidade de Ponta Grossa – PR, e está disponibilizado na página do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus de Ponta Grossa¹.

2 A Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática caracteriza-se pela integração da Matemática com outras ciências para solucionar um problema real com o auxílio da Matemática ou de outro conhecimento, isto é, não se restringe ao desenvolvimento e aplicação de conteúdos matemáticos.

O uso de modelagem está diretamente ligado à ideia de utilização da Matemática e de seus conceitos em fenômenos do mundo real. Para Bassanezi (2002), todo argumento matemático é ou pode ser relacionado com a realidade pertencente à Matemática Aplicada, que, por sua vez, hoje, pode ser considerada como a arte de aplicar a Matemática a situações problemáticas, utilizando-se a Modelagem Matemática.

Diante disso, pode-se dizer que a Modelagem Matemática constitui um método de pesquisa científica e, quando utilizada como método científico, possui alguns pontos que devem ser levados em consideração. Segundo Bassanezi (2002), sua utilização possibilita:

- estimular ideias novas e técnicas de experimentos;
- dar informações em diferentes aspectos dos previstos inicialmente;
- ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;
- servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

O autor ainda relata que a Modelagem Matemática teve grande participação no avanço de determinadas ciências como a Física, a Química Teórica e a Biomatemática devido à complexidade e evolução dos modelos matemáticos.

¹ Disponível em: <<http://www.pg.utfpr.edu.br/dirppg/ppgect/dissertacoes/arquivos/24.zip>>.

Para Bassanezi (2002), a modelagem tem caráter multidisciplinar, o que vai ao encontro do proposto pelas tendências educacionais, que é a ruptura das barreiras entre as diversas áreas de pesquisa. Assim, vários esquemas diferentes foram desenvolvidos na intenção de descrever as etapas que norteiam o processo de Modelagem Matemática.

Tal processo, de modo geral, segue algumas etapas na tentativa de lograr êxito na obtenção do modelo matemático. Sendo assim, descrevemos as etapas propostas por Almeida (2002) no desenvolvimento da atividade, as quais são explicadas individualmente, sendo:

- definição de um problema: o modelador deve identificar uma situação-problema para ser investigada e iniciar as pesquisas sobre o assunto para levantar os dados necessários para solucionar o problema;
- simplificação e formulação de hipóteses: devem ser analisados e selecionados os dados que mantenham as características do problema. Em seguida, faz-se uma simplificação, ou seja, selecionam-se as variáveis que comporão o estudo e as que poderão ser descartadas;
- dedução do modelo matemático: fase na qual ocorre a transferência de linguagem do problema para a linguagem matemática, podendo ser representada conforme definição de modelo matemático feita anteriormente;
- resolução do problema matemático: deve-se tentar a resolução do problema matemático formulado, utilizando-se dos recursos matemáticos, ou seja, *que Matemática utilizar?*;
- validação do modelo: etapa em que se verifica se o modelo encontrado é válido, de acordo com os dados iniciais do problema. Em caso positivo, o modelo pode ser utilizado para analisar, realizar previsões e tomar decisões acerca da situação-problema, do contrário, o modelador deve retornar ao processo de Modelagem Matemática, na etapa de simplificação e formulação de hipóteses, para a seleção das variáveis até a obtenção do outro modelo matemático;
- aplicação do modelo: em caso de validade do modelo matemático, pode-se utilizá-lo para fazer previsões, deduções, explicações e decisões acerca da situação-problema.

Essas etapas são determinadas como direcionamento do processo de Modelagem Matemática, para que possibilitem o resultado ideal na resolução de situações-problemas, porém não há necessidade em segui-las rigorosamente.

As tendências da Educação Matemática buscam romper com o ensino

tradicional, de modo a proporcionar o desenvolvimento do raciocínio crítico e, assim, capacitar o aluno para análise de problemas motivando-o a estudar a Matemática além daquela envolvida no problema:

É inegável que as escolas, em especial as universidades, oferecem um ensino que ainda funciona no sistema de autotransmissão, preocupado com aprovação em exames. Contudo, principalmente no que se refere o ensino de Matemática, a ênfase, na maioria das instituições tem ficado com o produto, em detrimento do processo, o que implica a má qualidade do primeiro (BELTRÃO, 2009, p. 78).

Para Araújo (2002), mesmo que haja diferentes perspectivas quanto às atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, a maioria dos pesquisadores corrobora a ideia de utilizar a Matemática para solucionar problemas não matemáticos no ensino e aprendizagem dessa disciplina, pois, permitem desenvolver habilidades individuais e coletivas e, ainda, a comunicação e interação entre os alunos.

Viecili (2006, p. 27) relata que “são indiscutíveis os argumentos favoráveis à Modelagem: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades e compreensão do papel sócio-cultural da Matemática”.

Portanto, é necessário que o professor tenha interesse em romper com as práticas educacionais tradicionais e dedique-se às exigências da utilização de estratégias de ensino e aprendizagem diferenciadas, que possibilitem a contextualização dos conhecimentos ensinados em sala de aula, em situações cotidianas, na busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática.

3 A ideia inicial e o desenvolvimento do projeto

A ideia da atividade surgiu após conversa com o orientador, que relatou o procedimento realizado pelos alunos de Engenharia Mecânica, no Laboratório de Metrologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Campus de Ponta Grossa (UTFPR-PG). Nesse procedimento, os alunos realizam as medições dos blocos-padrão, conforme as normas regulamentadoras, e, depois, plotam os gráficos dos erros obtidos nas medições em relação ao tamanho dos blocos.

Tais erros de medição podem ser causados por alguns motivos, como a temperatura durante as medições realizadas pelo operador; a força exercida

sobre o fuso – seja igual ou não àquela aplicada durante a ajustagem do micrômetro; erro do observador durante as medições dos blocos-padrão. Na sequência, utilizam conhecimento estatístico para certificar, com intervalo de confiança de noventa e cinco por cento (95%), a calibração do micrômetro e se é possível utilizá-lo para determinadas medições.

A partir desse relato, decidiu-se verificar a possibilidade de determinação de um modelo matemático para calibração do micrômetro por meio da Modelagem Matemática. Então, realizou-se uma visita ao Laboratório de Metrologia da UTFPR-PG, juntamente com os alunos da Engenharia Mecânica, para coleta dos dados necessários para a obtenção do modelo matemático.

Após coleta dos dados, realizou-se, com o uso do *software* Excel, a relação dos dados no qual se pode perceber, por meio da visualização do gráfico de dispersão, que o comportamento dos mesmos, para tal situação, tratava-se de um modelo polinomial, o que nos permitiria contextualizar o conteúdo de ajuste de funções, ou seja, uma função de calibração de erros para o micrômetro.

No desenvolvimento da atividade, foram realizados vários testes de ajustes de funções, do grau um até o nono, porém, a partir do sexto grau, foi utilizado o *software* Curve, pois o Excel só permite ajuste até o sexto grau. Durante a realização dos testes, percebeu-se que a partir do grau seis o ajuste não apresentava melhora significativa, ou seja, o coeficiente de determinação (R^2) sofria variação insignificante para o problema, então, decidiu-se que o melhor ajuste para os dados coletados seria o ajuste polinomial de sexto grau.

Focados em utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, optou-se por desenvolver essa atividade com os formandos do curso de Matemática da Universidade Estadual do Norte Paraná, Campus de Cornélio Procópio (UENP-CCP), com a intenção de demonstrar a utilização dessa estratégia na aplicação dos conteúdos matemáticos em situações reais. Afinal, os professores de Matemática são os responsáveis por contextualizar o seu ensino, independentemente do curso em que lecionam, seja em cursos técnicos, seja em tecnológicos, seja nas engenharias.

Na aplicação desse projeto todos os acadêmicos do curso de Matemática, em número de vinte e quatro, tiveram a oportunidade de conhecer e utilizar a Modelagem Matemática enquanto estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, em encontros semanais realizados na universidade.

O Caderno Pedagógico descreve o processo de modelagem, segundo as etapas sugeridas por Almeida (2002), realizado em dez encontros. Os recursos tecnológicos são aqueles utilizados na estimativa do modelo de calibração para

um micrômetro, apresentando-se os dados coletados de três equipamentos que permitem a obtenção de diferentes modelos de calibração. Assim, acredita-se que essa atividade possa ser realizada por outros professores no ensino do referido conteúdo matemático de forma contextualizada.

Durante a execução do projeto, foi registrada, por meio de fotos e gravações de áudio, a participação dos alunos. Os registros permitiram analisar as atitudes dos alunos quanto à participação nos debates, nas exposições, em suas interações com os colegas e com o professor e, de modo geral, sua motivação para o desenvolvimento das atividades práticas.

Inicialmente, como os alunos do curso de Matemática desconheciam o equipamento, foi realizada uma visita ao laboratório de Metrologia da UTFPR para conhecer o micrômetro, seus componentes e sua finalidade.

O micrômetro é um equipamento empregado para realizar medições lineares, de uso comum entre engenheiros mecânicos, mecânicos, na construção civil etc., e, também, pode ser encontrado em laboratórios didáticos da disciplina de Física, em cursos de Ensino Médio e Superior. A Figura 1 retrata o modelo de micrômetro utilizado na atividade.



Figura 1 – Micrômetro (0 - 25mm)

Fonte: próprio autor.

Para a calibração do micrômetro, são utilizados blocos-padrão como medidas de referência. Esses blocos, conforme Figura 2, são produzidos e certificados por empresas autorizadas pelos órgãos competentes para garantir a calibração do equipamento.



Figura 2 – Caixa de bloco-padrão

Fonte: próprio autor.

Na realização dessa atividade, utilizou-se o Momento 2 da implementação da Modelagem Matemática em sala de aula, conforme Almeida e Dias (2002) no qual o professor propõe a situação-problema já definida por ele, juntamente com as informações previamente coletadas; os alunos realizam o levantamento e simplificação das hipóteses, deduzem o modelo matemático durante o desenvolvimento do processo e, por fim, a validação do modelo obtido para solução do problema em questão.

Portanto, para desenvolvimento da atividade, iniciou-se o trabalho a partir da etapa de formulação das hipóteses. Tais hipóteses devem ser definidas por cada grupo de acordo com o processo de Modelagem Matemática, com a utilização do *software Excel* e normas para calibração do micrômetro.

Sendo assim, o desenvolvimento da atividade foi realizado com base nas etapas de Modelagem Matemática, conforme descritas anteriormente. Foi dessa maneira que o projeto proposto prosseguiu:

a) Definição da situação problema

- De que forma estimar o modelo matemático de calibração para um micrômetro?

b) Simplificação e formulação de hipóteses

- A temperatura da sala onde foi realizada a medição, o micrômetro e o jogo de bloco-padrão estavam à mesma temperatura.
- O micrômetro e o jogo de bloco não apresentam oxidação.
- Foram utilizadas luvas durante a medição dos blocos.
- Foi desconsiderado o erro do observador.
- Valor da medida-padrão era: domínio de 0 a 25mm.
- O erro calibrado foi: $E(x)$.
- As medidas-padrão foram (indicadas pelas NBR²): a .
- Os dados observados foram: x .
- O erro considerado era: a diferença da medida-padrão e o dado observado ($a - x$).
- O erro médio foi a média aritmética simples do Erro.
- O modelo matemático estimado para calibração de um micrômetro: $C(x)$.

c) Dedução do modelo matemático

- De que forma estimar o modelo matemático de calibração para um micrômetro com base em uma função matemática?

d) Resolução do problema matemático

² Norma Brasileira (NBR) aprovada pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Após a apresentação do micrômetro e do bloco, apresentam-se os dados coletados na calibração do micrômetro a ser calibrado. Os dados coletados com o micrômetro denominado 25_5 estão especificados na Tabela 1, sendo a primeira coluna as medidas-padrão (a) e, a segunda, os dados observados (x):

Tabela 1 – Dados coletados pelo micrômetro 25_5

a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
0	-0,003	5,1	5,101	10,3	10,308	15	14,997	20,2	20,2
0	-0,003	5,1	5,106	10,3	10,301	15	14,999	22,8	22,801
0	-0,002	5,1	5,107	10,3	10,301	17,6	17,599	22,8	22,796
0	-0,001	5,1	5,103	12,9	12,901	17,6	17,6	22,8	22,797
0	-0,004	7,7	7,709	12,9	12,902	17,6	17,597	22,8	22,799
2,5	2,499	7,7	7,708	12,9	12,905	17,6	17,598	22,8	22,799
2,5	2,498	7,7	7,7	12,9	12,902	17,6	17,598	25	25
2,5	2,498	7,7	7,709	12,9	12,901	20,2	20,199	25	24,999
2,5	2,499	7,7	7,701	15	14,999	20,2	20,205	25	24,997
2,5	2,499	10,3	10,302	15	14,999	20,2	20,199	25	24,992
5,1	5,109	10,3	10,303	15	14,998	20,2	20,2	25	24,998

Fonte: próprio autor.

Para essa etapa, são apresentados os itens de I a VI, importantes para determinação do modelo de calibração do micrômetro:

I. De posse dos dados, deve-se calcular o erro encontrado nas medições entre as medidas-padrão (a) e os dados observados (x), conforme Tabela 2:

Tabela 2 – Erros das medições do micrômetro 25_5

a	x	Erro	a	x	Erro	a	x	Erro	a	x	Erro
0	-0,003	-0,003	7,7	7,709	-0,009	15	14,999	0,001	22,8	22,801	-0,001
0	-0,003	-0,003	7,7	7,708	-0,006	15	14,999	0,001	22,8	22,796	0,004
0	-0,002	-0,002	7,7	7,7	0	15	14,998	0,002	22,8	22,797	0,003
0	-0,001	-0,001	7,7	7,709	-0,009	15	14,997	0,003	22,8	22,799	0,001
0	-0,004	-0,004	7,7	7,701	-0,001	15	14,999	0,001	22,8	22,799	0,001
2,5	2,499	0,001	10,3	10,302	-0,002	17,6	17,599	0,001	25	25	0
2,5	2,498	0,002	10,3	10,303	-0,003	17,6	17,6	0	25	24,999	0,001
2,5	2,498	0,002	10,3	10,308	-0,008	17,6	17,597	0,003	25	24,997	0,003
2,5	2,499	0,001	10,3	10,301	-0,001	17,6	17,598	0,002	25	24,992	0,008
2,5	2,499	0,001	10,3	10,301	-0,001	17,6	17,598	0,002	25	24,998	0,002
5,1	5,109	-0,009	12,9	12,901	-0,001	20,2	20,199	0,001			
5,1	5,101	-0,001	12,9	12,902	-0,002	20,2	20,205	-0,005			
5,1	5,106	-0,006	12,9	12,905	-0,005	20,2	20,199	0,001			
5,1	5,107	-0,007	12,9	12,902	-0,002	20,2	20,2	0			
5,1	5,103	-0,003	12,9	12,901	-0,001	20,2	20,2	0			

Fonte: próprio autor.

II. Construir a relação entre as medidas-padrão e o erro das medições, conforme Figura 3:

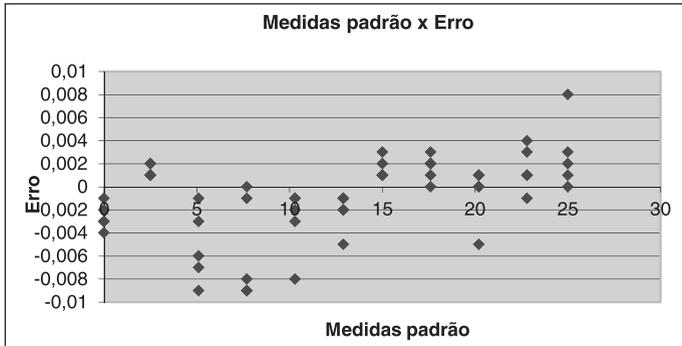


Figura 3 – Medidas-padrão x Erros das medições

Fonte: próprio autor.

Nesse momento, é impossível definir uma função por esses pontos, pelo fato de uma medida padrão ter cinco valores de erro, ou seja, um elemento do domínio possui mais de uma imagem.

III. Determinar a média aritmética simples para os erros de cada medida padrão, pois, assim, é possível determinar um par ordenado composto pelo erro médio e a cada medida padrão, conforme Tabela 3:

Tabela 3 – Medidas-padrão x Erros das medições

a	$\bar{Erro\ médio}$	a	$\bar{Erro\ médio}$
0	-0,003	15	0,0016
2,5	0,0014	17,6	0,0016
5,1	-0,0052	20,2	0,0006
7,7	-0,0054	22,8	0,0016
10,3	-0,003	25	0,0028
12,9	-0,0022		

Fonte: próprio autor.

IV. Construir o gráfico com as medidas-padrão e o erro médio para visualizar a tendência dos pontos e fazer suposições acerca deles, conforme Figura 4:

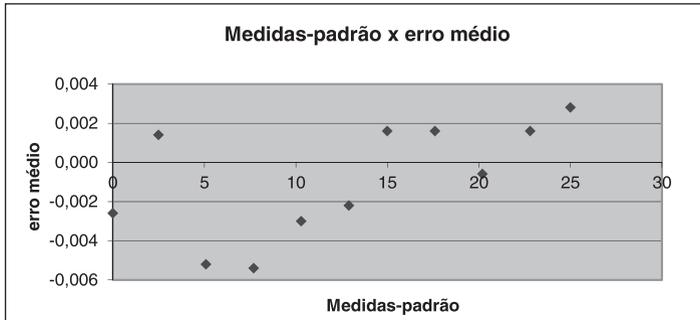


Figura 4 – Medidas-padrão x Erros das médio
 Fonte: próprio autor.

V. Para definir a linha de tendência dos dados deve-se utilizar o *software Excel* que permite realizar vários testes com diversos tipos de linha de tendência e escolher a que possui melhor coeficiente de determinação (R^2), ou seja, o valor mais próximo de 1.

A determinação da linha de tendência visualmente demonstra se tratar de um modelo polinomial, mas os alunos podem fazer a definição de cada tipo de tendência e verificar o coeficiente de determinação para acatar ou descartar o modelo determinado.

Nesse caso, trata-se de uma função polinomial de sexto grau, como pode ser verificado no *Excel*. Porém, sugere-se utilizar, por exemplo, o *software Curve Expert* para verificar que para graus maiores do polinômio o coeficiente de determinação não apresenta melhora significativa.

VI. Adicionar linha de tendência polinomial de grau sexto aos dados de medidas-padrão x erro médio, conforme Figura 5:

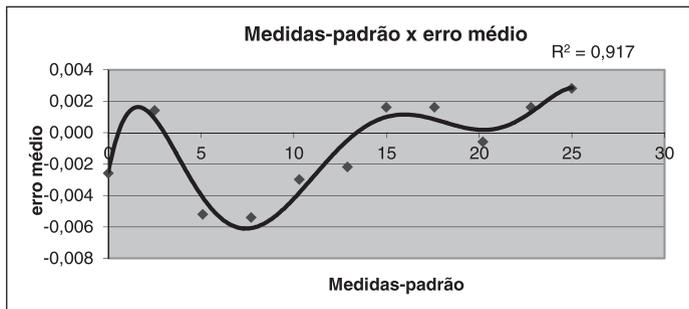


Figura 5 – Linha de tendência para as Medidas-padrão x Erro médio
 Fonte: próprio autor.

A linha de tendência polinomial de grau sexto, definida acima, possui como função o modelo matemático do erro estimado na calibração do micrômetro descrito abaixo:

$$E(x) \cong -0,002901 + 0,006299x - 0,00281x^2 + 0,0004233x^3 - 0,00002852x^4 + 0,0000008922x^5 - 0,00000001056x^6$$

Os parâmetros definidos no modelo do erro estimado para calibração do micrômetro podem ser obtidos no *Curve Expert* ou no *Excel*, analisando as aproximações feitas pelo *software*. No caso do *Excel*, o número de casas decimais é menor e o arredondamento pode causar variação nos resultados. Então, foram utilizadas no mínimo seis casas decimais definidas pelo *software Curve Expert*.

Para estimar o modelo de calibração do micrômetro, deve-se realizar a diferença entre o *dado observado* (x) e o *erro estimado* ($E(x)$) que deve retornar à medida-padrão.

Na prática, não se sabe qual a espessura do bloco-padrão que está sendo medido. Como se confia no modelo de calibração, o valor numérico obtido para $C(x)$ é considerado como sendo o verdadeiro diâmetro (isento de erro) da peça que está sendo medida:

$$C(x) = x - E(x)$$

e) Validação do modelo

Após definição do modelo matemático para o erro estimado para calibração do micrômetro, deve-se fazer a validação com os dados utilizados para determinação do modelo, conforme descrito anteriormente.

A validação pode ser realizada no *Excel*, e permite comparar as medidas-padrão com os dados calculados pelo modelo de calibração. Como se deve validar o modelo com os valores que foram utilizados em sua determinação, pode-se escolher aleatoriamente os dados observados que se deseja comparar. Nesse caso, escolheram-se os dados observados que estão na segunda coluna do Tabela 4:

Tabela 4 – Cálculo pelo modelo matemático estimado para calibração do micrômetro ($C(x)$)

Med. Padrão (a)	Obs. (x)	Modelo calibrado ($C(x)$)	Med. Padrão (a)	Obs. (x)	Modelo calibrado ($C(x)$)
0	-0,003	0,00	15	14,997	15
2,5	2,498	2,5	17,6	17,598	17,6
5,1	5,106	5,11	20,2	20,205	20,2
7,7	7,708	7,71	22,80	22,799	22,80
10,30	10,301	10,30	25	24,995	24,99
12,90	12,905	12,91			

Fonte: próprio autor.

Após a comparação dos dados, deve-se verificar a diferença entre o valor encontrado no modelo e a medida padrão. Caso sejam próximas, deve-se dar o modelo como válido, pois se trata de um modelo voltado para Educação Matemática, na qual o interesse deve ser a contextualização e aplicação de conceitos matemáticos.

Por se tratar de um modelo válido, segue-se para a etapa de aplicação do modelo.

f) *Aplicação do modelo*

Para aplicação do modelo, foram escolhidos aleatoriamente blocos-padrão no domínio de 0 mm a 25 mm, diferente daqueles apresentados na Tabela 1. Foram observados os diâmetros dos blocos-padrão escolhidos. A Tabela 5 apresenta as medidas dos blocos-padrão utilizados com as respectivas medidas observadas:

Tabela 5 – Medidas-padrão para aplicação do modelo matemático

Medida padrão (a)	1,05	4,85	6,15	8,40	12,10	14,00	17,10	18,40	21,30	24,50
Dados observados	1,051	4,848	6,151	8,403	12,112	14,000	17,101	18,400	21,308	24,500

Fonte: próprio autor.

Com o modelo matemático $E(x)$, estimam-se os respectivos erros para cada observação realizada. Exemplificando, segue abaixo o cálculo do erro estimado para o valor observado 1,051 mm:

$$E(x) \cong -0,002901 + 0,006299(1,051) - 0,00281(1,051)^2 + 0,0004233(1,051)^3 - 0,00002852(1,051)^4 + 0,0000008922(1,051)^5 - 0,00000001056(1,051)^6$$

$$E(x) \cong -0,001073$$

Para a observação de 1,051 mm, foi estimado um erro de 0,001073 mm. Para o erro estimado $E(x)$, foram consideradas seis casas decimais para que as medidas não fossem distorcidas, pois aproximações ao longo da atividade podem causar distorções no modelo.

Seguindo o mesmo procedimento, realizado para o dado observado de 1,051mm, para as demais observações, têm-se os erros estimados para os diâmetros de cada bloco-padrão utilizado. Em seguida estima-se o verdadeiro diâmetro de cada bloco com a equação $C(x) = x - E(x)$. Os resultados desse procedimento são apresentados na Tabela 6:

Tabela 6 – Medidas-padrão para aplicação do modelo matemático

Med. padrão (a)	Obs. (x)	Erro estimado (E(x))	Modelo calibrado (C(x))	Med. padrão (a)	Obs. (x)	Erro estimado (E(x))	Modelo calibrado (C(x))
1,05	1,051	0,001073	1,050	14,00	14,000	0,000771	13,999
4,85	4,848	-0,003681	4,852	17,10	17,101	0,001640	17,099
6,15	6,151	-0,005502	6,157	18,40	18,400	0,001457	18,399
8,40	8,403	-0,057590	8,409	21,30	21,308	0,002108	21,306
12,10	12,112	-0,001257	12,113	24,50	24,500	0,006018	24,494

Fonte: próprio autor

Comparando a medida padrão e o modelo calibrado, é possível verificar as diferenças. Tais diferenças podem ter sido causadas pelas aproximações do *software Excel* que efetua os cálculos com determinado número de casas decimais, pois foram consideradas como verdadeiras as hipóteses de igualdade de temperatura da sala de medição e a dos equipamentos, a coleta dos dados, o uso de material adequado, dentro outros.

Também, nesse momento, é importante verificar que o modelo encontrado por meio do ajuste de função tem a finalidade de minimizar os erros das medições realizadas pelo micrômetro, e não zerá-los. Sendo assim, é possível que o modelo ajustado cause distorções em determinadas medições, e, dessa forma, piorem os dados observados.

No entanto, é possível verificar que a aplicação do modelo é válida, pois retorna os valores das medidas-padrão. Assim, do ponto de vista da Educação Matemática, pode-se dizer que essa forma de realização de calibração de micrômetro pode ser utilizada como atividade de contextualização para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de ajuste de funções, tanto para os alunos de licenciatura em Matemática quanto para os de Engenharia, e, ainda, pode contribuir com a área de Matemática Aplicada, utilizando-se de conhecimentos matemáticos em atividades específicas.

4 Considerações finais

A atividade realizada com os alunos permite identificar características como o diálogo, levantamento e teste de hipóteses, transferência da situação-problema para a linguagem matemática, aplicação de conceitos matemáticos num contexto no qual os alunos foram convidados a utilizar a Modelagem Matemática enquanto estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática. Nesse contexto, à medida que os alunos investigam a situação-problema, identificam-

se alguns aspectos que permitem emergir facilidades e dificuldades encontradas em etapas do processo de Modelagem Matemática.

Percebe-se que a Modelagem Matemática surge como uma estratégia que possibilita a utilização dos recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, articulando o conhecimento matemático à situação-problema. Essa atividade de Modelagem permitiu a (re)produção de conhecimento pelo pensamento coletivo, ou seja, as discussões realizadas no grupo e entre os grupos possibilitou a (re)produção do conhecimento matemático à medida que utilizavam os recursos tecnológicos para simular e realizar desenvolvimentos matemáticos na busca pela solução do problema.

A Modelagem Matemática nos permite pensar num ensino que possibilite aos alunos desenvolver e utilizar habilidades como identificar situações-problemas, levantar hipóteses e refutá-las, formular e desenvolver modelos matemáticos e argumentar sobre a validade ou não desses modelos. A atividade desenvolvida proporcionou aos alunos um olhar diferente sobre a Educação Matemática. Pois, por meio da Modelagem Matemática, os alunos contribuíram para a solução de um problema real de outra área do conhecimento o que vem a fortalecer a importância do conhecimento matemático e sua aplicação em atividades cotidianas.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática na formação inicial de professores de matemática, pode ser aplicada com intuito de que seja utilizada futuramente quando da atuação desses futuros professores, contribuindo para que seus alunos busquem, por meio do conhecimento matemático, do trabalho em grupo, da troca de experiências, soluções para problemas que a sociedade venha a encontrar.

Além da contribuição da Modelagem Matemática na atividade desenvolvida, pode-se perceber que a elaboração de um Caderno Pedagógico, no qual se indica passo a passo o processo de obtenção do modelo, possibilita aos professores do Ensino Superior e professores em formação compreenderem a utilização da estratégia de ensino e aprendizagem da Modelagem Matemática em problemas reais, bem como o conteúdo de ajuste de funções.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. **Introdução à Modelagem Matemática**. Notas de aula. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina: UEL, 2002.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. **Modelagem Matemática em sala de aula**. Notas de aula. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina: UEL, 2002.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática**: as discussões dos alunos. 2002. 127f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**, São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações** – Teoria e prática. 2009. 322f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

VIECILI, C. R. C. **Modelagem Matemática**: uma proposta para o ensino de matemática. 2006. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

Submetido em Agosto de 2012.
Aprovado em Novembro de 2012.