



# **Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula**

## **Symmetry in Elementary School through Problem Solving: possibilities for the classroom**

Gilberto Vieira\*

Rosa Monteiro Paulo\*\*

Norma Suely Gomes Allevalo\*\*\*

### **Resumo**

Este artigo tem como objetivo apresentar uma possibilidade de trabalho com o tema simetria na sala de aula do Ensino Fundamental. A proposta baseia-se na pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática realizada segundo uma abordagem qualitativa. Na pesquisa, foi realizado um trabalho de campo que consistiu no desenvolvimento de uma sequência didática planejada sob a perspectiva do ensino de Matemática através da resolução de problemas com alunos de uma turma de sétimo ano do Ensino Fundamental. Na elaboração da sequência didática, foram levados em consideração aspectos como a intuição e a visualização, relevantes ao estudo da geometria. Durante a realização da sequência didática os diálogos entre os alunos e

---

\* Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP, Brasil. Docente do Ensino Fundamental na Rede Municipal de Educação, São José dos Campos, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Passadena, 355, ap. 63-A, Jardim Califórnia, CEP: 12305-660, Jacareí, SP, Brasil. *E-mail*: gilbertoeducador@yahoo.com.br.

\*\* Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Professora do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, SP Brasil. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Dr. Ariberto Pereira da Cunha, 333, Pedregulho, CEP: 12516-410, Guaratinguetá, SP, Brasil. *E-mail*: rosa@feg.unesp.br.

\*\*\* Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Professora e pesquisadora da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cônego Manoel Vaz, 584, ap. 81, CEP: 02019-050, São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: normallev@uol.com.br.

professor foram gravados e, posteriormente, transcritos. Para a análise dos dados adotaram-se os procedimentos da fenomenologia. Na interpretação dos dados vimos que o ensino de simetria através da resolução de problemas potencializa a aprendizagem. Mostra-se ainda que, em um ambiente de investigação, os alunos são capazes de identificar propriedades, argumentar sobre as características geométricas percebidas e justificar suas afirmações.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Resolução de Problemas. Ensino de Geometria. Ensino de Simetria.

### Abstract

This paper presents an alternative way of working with the theme of symmetry in the elementary school classroom. The proposal is based on qualitative research developed in the Professional Masters degree program in Science and Mathematics Teaching. We conducted field-work consisting of applying a sequence of activities for students in the seventh grade. The sequence was developed from the perspective of mathematics teaching using problem solving, taking into consideration aspects relevant to the study of geometry, such as intuition and visualization. In carrying out the activities, the dialogues between students and teacher were recorded and later transcribed. For data analysis we used the procedures of phenomenology. When interpreting the data, we observed that the teaching of symmetry using problem-solving enhances learning. We also found that, in an investigative environment, students are able to identify properties, argue about the geometric characteristics, and justify their opinions.

**Keywords:** Mathematics Education. Problem Solving. Geometry Teaching. Symmetry Teaching.

## 1 Introdução

Este artigo apresenta um recorte da pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática (VIEIRA, 2011) que teve como foco de investigação o ensino de simetria no Ensino Fundamental, através da resolução de problemas.

No Brasil, o ensino de geometria, e em particular o de simetria, vem se constituindo, nas últimas décadas, como um verdadeiro desafio para os professores de Matemática. Ao mesmo tempo em que surgem propostas interessantes para a abordagem do tema em sala de aula, como a utilização de materiais manipulativos (MEGA, 2001) ou de *software* de geometria dinâmica (BILAC, 2008), apenas para citar alguns recursos, o que se observa, na prática, é que muitas vezes os professores de Matemática não conseguem implementar

ações para uma proposta de trabalho diferenciada. Alguns autores da Educação Matemática já discutiram os obstáculos que dificultam e, muitas vezes, impossibilitam o ensino da geometria, dentre os quais são destacados a formação deficitária de muitos docentes com relação aos conteúdos geométricos e às estratégias que podem ser utilizadas para propiciar a construção do conhecimento geométrico pelo aluno (LORENZATO, 1995; NACARATO; PASSOS, 2003; NUNES, 2010; PAVANELLO, 1989). É imprescindível que o professor apresente domínio dos conteúdos e procedimentos básicos relacionados ao assunto que pretende ensinar. Bicudo (2005) nos permite compreender que o ensino está relacionado ao conhecer. Se o professor conhece aquilo que vai ensinar, é capaz de expressar-se visando à comunicação com o aluno, ou seja, ele busca se fazer entender na sala de aula. Além disso, ao conhecer o conteúdo de ensino, ele também é capaz de julgar o que considera importante ao aluno aprender. Esse *considerar importante*, porém, deve ser bem entendido, uma vez que ele não diz da responsabilidade (ou liberdade) de o professor eleger o conteúdo a ser ou não ensinado. Ele diz, antes, do modo pelo qual esse conteúdo poderá ser ensinado com vistas à aprendizagem. Conhecer o conteúdo diz respeito aos aspectos ontológicos (que permitem identificar *isso que é*) e epistemológicos (que se referem à *forma* pela qual se conhece *isso que é*). Bicudo (2010) afirma que “o epistemológico não se separa, do ponto de vista do seu processo de produção, do ontológico” (BICUDO, 2010, p. 13). Por isso, o professor tem a preocupação tanto com o conhecimento do tema (ou conteúdo a ser tratado em aula), buscando compreendê-lo, sempre de forma mais abrangente, quanto com o modo pelo qual tal conteúdo poderá ser ensinado, uma vez que se tem uma concepção da forma pela qual ele poderá ser conhecido. Portanto, o professor, ao conhecer o conteúdo com o qual vai trabalhar em aula, preocupa-se com o conhecer do aluno e busca criar oportunidades, em sala de aula, para que o aluno trilhe caminhos que lhe permitam atribuir significado àquilo que está sendo ensinado.

Ser professor é preocupar-se com o ser do aluno, tentando auxiliá-lo a conhecer algo que ele, professor, já conhece e que julga importante que o aluno venha a conhecer, também. Esse já conhece tem o sentido de que o professor é alguém que já possui pelo menos algum domínio sobre a área de conhecimento, objeto do seu ensino. Não possui o significado de que o professor domine completamente tal área e que não esteja em situação de abrir-se a novos conhecimentos (BICUDO, 2005, p. 48).

As pesquisas em Educação Matemática citadas tratam, além da falta de conhecimento do professor acerca do assunto a ser ensinado, do hábito (ou da cultura construída ao longo do tempo) de deixar para tratar os conteúdos de geometria no final do ano letivo, como unidades separadas e independentes de outros conteúdos matemáticos; do espaço limitado destinado à geometria nos guias e programas curriculares e da influência do Movimento da Matemática Moderna que conferiu ao ensino de geometria um caráter essencialmente formal e abstrato sem valorizar aspectos inerentes ao pensamento geométrico como intuição, visualização e representação.

Ao perguntarmos: *a resolução de problemas contribui para a produção do conhecimento de simetria, pelo aluno?*, expomos a nossa incerteza, a nossa dúvida e o desejo que impulsiona e dá direção ao movimento da pesquisa. Essa pergunta traduz a interrogação e se configura como o fio norteador que conduz nossa investigação. Assim, pretendemos, neste artigo, apresentar e discutir algumas ideias e sugestões de tarefas para o ensino de geometria que permitam ao professor de Matemática refletir sobre o modo pelo qual o conhecimento de simetria é produzido pelo aluno do Ensino Fundamental.

Essas atividades foram organizadas para a pesquisa desenvolvida durante o curso de Mestrado Profissional, que tem como um de seus objetivos abrir espaço à reflexão do fazer em sala de aula, dando oportunidade de o professor, num trabalho de intervenções efetivas nas práticas educativas dos níveis fundamental e médio de escolarização, aprimorar a sua prática docente, voltando-se para a compreensão dos atos de ensinar e aprender. Nesse contexto, como aluno de um curso de Mestrado Profissional e interessado em trabalhar em sala de aula uma proposta que permitisse aos alunos compreenderem a ideia de simetria, desenvolvemos uma sequência didática sobre esse conteúdo<sup>1</sup> planejada sob a perspectiva da resolução de problemas.

Para que seja possível compreender o contexto no qual as tarefas estão sendo propostas, consideramos importante trazer, de modo breve, algumas ideias que nortearam a opção do fazer em sala de aula.

---

<sup>1</sup> A sequência didática referida neste artigo está descrita em sua totalidade na dissertação de mestrado intitulada *O Ensino de Simetria no Sétimo Ano do Ensino Fundamental via Resolução de Problemas: uma análise fenomenológica* de autoria de Gilberto Vieira (orientação da Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rosa Monteiro Paulo), apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, disponível em: <[http://sites.cruzeirosulvirtual.com.br/pos\\_graduacao/trabs\\_programas\\_pos/trabalhos/Mestrado\\_Ensino\\_de\\_Ciencias\\_e\\_Matematica/MESTRADO-Gilberto%20Vieira\\_2.PDF](http://sites.cruzeirosulvirtual.com.br/pos_graduacao/trabs_programas_pos/trabalhos/Mestrado_Ensino_de_Ciencias_e_Matematica/MESTRADO-Gilberto%20Vieira_2.PDF)>.

## 2 Conhecendo a região de inquérito

O ensino de geometria na matemática escolar desempenha um papel importante, pois a compreensão da geometria implica o desenvolvimento da percepção espacial, da capacidade de observar o que está ao redor e de perceber a natureza das formas. Permite, ainda, o desenvolvimento de uma série de habilidades, tais como as capacidades de descrever, de representar, de medir e de dimensionar objetos presentes na vida cotidiana.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p. 51).

Além do desenvolvimento da percepção espacial, Pavanello (2004) destaca outras contribuições que a geometria pode dar à formação do aluno como o desenvolvimento das capacidades de intuir, levantar hipóteses, antecipar o que pode acontecer, abstrair, generalizar e projetar. Essas capacidades conferem ao pensamento geométrico uma peculiaridade única, e são fundamentais no processo de formação do aluno.

Para Fainguelernt (1999), a geometria é constituída, em sua essência, pela intuição, pelo formalismo, pela abstração e pela dedução. No entanto, a autora chama a atenção para uma discrepância existente entre a natureza do conhecimento geométrico e a geometria que é ensinada nas escolas. Se, por um lado, a geometria é a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade, por outro lado, como disciplina escolar, a geometria tem se apoiado em um extensivo processo de formalização. A autora afirma que ela tem aparecido nos livros-texto de forma desligada da realidade dos alunos, pouco relacionada com a exploração do espaço e com os outros componentes da Matemática, sem que se faça conexão entre geometria intuitiva e formalização.

Não se trata de banalizar o ensino de geometria ou desconsiderar a importância da formalização e, sim, de chamar a atenção para alguns aspectos essenciais no tratamento da geometria como a *intuição* e a *visualização*.

Para Pais (2006), a *intuição* é uma forma de conhecimento espontâneo e imediato, relativo aos conhecimentos acumulados pelo sujeito portador dessa intuição. Pode ser entendida como a apreensão imediata de um objeto e está relacionada às experiências pessoais e a um esforço consciente da pessoa em

conhecer o procurado. O conhecimento intuitivo é propiciado pelas experiências que o indivíduo vivencia. A forma pela qual o indivíduo experimenta o mundo que o cerca é propiciada pelos sentidos. Nessa perspectiva, a *visualização* se apresenta como outro aspecto relevante no estudo de geometria.

Com relação à *visualização*, não estamos nos referindo apenas às habilidades de observar, ver ou enxergar, mas a todo um conjunto de habilidades como perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informações visuais. Fainguelernt (1999) considera que a *visualização* é importante, pois, além de ampliar a *intuição*, auxilia a compreensão de outras áreas da Matemática. Também favorece o desenvolvimento de capacidades ligadas à inteligência espacial, como transformar ou reconhecer uma mudança de um elemento em outro, evocar formas mentais e transformá-las, produzir representações gráficas de informações espaciais e perceber uma forma ou um objeto sob diferentes pontos de vista.

Nesse sentido, defendemos que o ensino de geometria, em um estágio inicial, deve ser realizado enfatizando-se as tarefas de exploração, reconhecimento e descrição do espaço pela *intuição* e *visualização*. Esse fazer permite ao aluno construir significados para as ideias geométricas, sendo, esse processo de construção, essencial para a generalização e abstração. Para Pais (2006), o tratamento articulado de tarefas que levem ao desenvolvimento das capacidades de intuir, visualizar e generalizar torna-se uma das condições para a formação de conceitos, modelos e teorias, e contribui para o desenvolvimento do raciocínio abstrato e a produção do conhecimento matemático pelos alunos.

A partir dessas compreensões, vislumbramos, no trabalho realizado no mestrado, a possibilidade de abordar o tema *simetria* como um campo fértil para explorar aspectos intuitivos de uma área de conhecimento – a geometria – que vem sendo relegada ou deixada em segundo plano. No que se refere à aprendizagem matemática, considera-se o trabalho com simetria relevante, pois favorece a compreensão das ideias de congruência e semelhança de figuras geométricas (isometrias e homotetias) previstas no currículo do Ensino Fundamental. Entendemos que o trabalho com simetria revela-se importante, ainda, para a produção do conhecimento geométrico, na medida em que contribui para o reconhecimento de aspectos que permanecem invariantes, como forma e tamanho.

A reflexão sobre as possibilidades de ensino de simetria que possibilitem a produção do conhecimento pelo aluno é necessária. Como já mencionamos anteriormente, há pesquisas que vêm sendo desenvolvidas com o objetivo de

apresentar recursos para a abordagem do tema simetria (que envolvem o uso de materiais manipulativos, obras de arte, malhas quadriculadas, *software* de geometria dinâmica, entre outros). Nossa intenção é acrescentar a essas discussões uma sugestão de estratégia de ensino que englobe tanto o caminho escolhido para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, quanto a postura adotada acerca da concepção de construção do conhecimento.

Privilegia-se, nas tarefas propostas, uma forma particular de pensar que envolva intuição, percepção, visualização, representação, generalização e abstração. Para tanto, pensamos no desenvolvimento dessas capacidades e procuramos fugir do lugar comum evidenciado nos exercícios de memorização e repetição, que pouco contribuem para a construção do pensamento geométrico. Adotamos a *metodologia do ensino de Matemática através da resolução de problemas* (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009) para o planejamento das tarefas de ensino de simetria e seu desenvolvimento em sala de aula. Assumir tal metodologia foi significativo uma vez que a *resolução de problemas* traz grande potencialidade para a aprendizagem geométrica, permitindo uma participação ativa do aluno que é levado a assumir a corresponsabilidade por sua aprendizagem.

Segundo Onuchic (1999, p. 208) “quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver a sua própria compreensão.” O interesse principal em se trabalhar com a resolução de problemas repousa na compreensão de que o mais importante nessa postura de ensino é ajudar os alunos a entender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias relacionadas ao conteúdo estudado. O processo de resolução de problemas, por exigir do aluno uma postura ativa, leva-o a ampliar sua compreensão inicial, uma vez que ele se lança para além do conhecimento existente, levantando hipóteses, fazendo conjeturas, procurando argumentos que lhe permitam defender um ponto de vista e expressar uma forma de raciocínio.

Trazemos, na sequência, nossa compreensão acerca da postura assumida, buscando esclarecer como a resolução de problemas norteou as tarefas de ensino de simetria.

### **3 O ensino de simetria através da resolução de problemas e as tarefas propostas**

Para Onuchic (1999, p. 215) “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.” Van de Walle (2009) assume a

definição de problema como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhuma regra já memorizada para resolução e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que exista um método específico de resolução. Compartilhando das definições apresentadas, assumimos que um problema é qualquer atividade para a qual haja a intenção (ou a necessidade) de enfrentá-la sem que existam procedimentos pré-estabelecidos (ou conhecidos).

O problema funciona como um elemento motivador e propulsor da aprendizagem e deve envolver os alunos na busca de uma solução. Para engajar os estudantes na tarefa de resolver um problema, a situação proposta deve apresentar algumas características, tais como: ser atraente, motivadora e desafiadora. Um problema não pode ser difícil demais e nem ser fácil demais, para não desencorajar os estudantes. A tarefa proposta deve adequar-se ao nível dos alunos. Eles devem se sentir capazes de alcançar os resultados. Se o problema for muito difícil, os alunos podem desanimar e desistir; se for muito fácil, o problema perde o caráter desafiador, fazendo com que a tarefa acabe por desestimular os alunos, o que não favorece a reflexão.

Buscando compreender o processo de produção do conhecimento de simetria de alunos do Ensino Fundamental, em nossa pesquisa de mestrado, realizamos um trabalho de campo em uma classe de sétimo ano, com 37 alunos (faixa etária de 11 a 12 anos de idade) de uma escola municipal da cidade de São José dos Campos, interior do estado de São Paulo. Nesse trabalho, o pesquisador, que também era professor de Matemática da classe, adotou a postura metodológica do ensino através da resolução de problemas e desenvolveu com os alunos uma sequência de tarefas visando o conteúdo simetria.

Valorizamos, na organização das atividades, o aspecto perceptivo uma vez que,

[...] o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão de relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas, em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Porém, isso não significa que não se deva ter preocupação em levar os alunos a fazer uso de um vocabulário mais preciso (BRASIL, 1998, p. 68).

Também nos apoiamos nas orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, segundo as quais o ensino de geometria, em particular o de simetria, deve privilegiar a visualização e a compreensão das propriedades geométricas sem manifestar uma maior preocupação com o vocabulário

matemático específico. A nomenclatura correta (termos como reflexão, rotação, translação, axial, bilateral, eixo de simetria, isometria entre outros) vai, aos poucos, sendo incorporada pelos alunos, seja no diálogo com o professor, no diálogo com os colegas ou na leitura dos enunciados dos problemas.

Outra característica importante que foi levada em consideração é o fato de, a partir da manipulação e observação das formas geométricas, ser possível levar o aluno a explorar algumas propriedades geométricas. “O estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades.” (BRASIL, 1998, p. 86).

A elaboração das atividades envolveu diversas fontes de consulta tais como livros didáticos, livros paradidáticos, dissertações de mestrado sobre o ensino de simetria e, ainda, algumas tarefas de criação própria. Elas incluíram o uso de dobraduras e a resolução de problemas escritos na língua materna. Para a realização das tarefas os alunos foram organizados em grupos, de modo que fosse possível, ao pesquisador, acompanhar o envolvimento dos alunos com o tema estudado e, aos alunos, construírem argumentos para *defender* suas hipóteses, organizando o pensar para expor ao grupo.

Nas atividades realizadas por meio de dobraduras, as situações-problema eram apresentadas de forma oral. Foram explorados quatro movimentos de simetria: reflexão com o eixo de simetria interno à figura, reflexão com o eixo de simetria externo à figura, translação e rotação. O proposto levou em consideração o aspecto perceptivo do conhecimento geométrico, entendido como sendo importante em um primeiro contato do aluno com o tema. Durante a realização das dobras, os alunos eram questionados sobre o que estavam fazendo e, desses diálogos, surgiam novos questionamentos. As situações eram problematizadas e os alunos discutiam entre si suas resoluções, para apresentá-las, posteriormente, ao restante da sala. As aulas foram gravadas em áudio e, depois, transcritas.

Nas tarefas de resolução de problemas, em que os enunciados estavam escritos na língua materna, houve muita discussão nos grupos. Essas tarefas consistiram de quatro situações problema, apresentadas com o objetivo de analisar a compreensão que os alunos tinham dos enunciados e a forma pela qual os conhecimentos eram mobilizados. Os diálogos, entre os alunos e entre alunos e professor, decorrentes das discussões, também foram gravados em áudio e, posteriormente, transcritos e analisados na pesquisa de mestrado.

As transcrições das falas dos alunos tornam-se texto que traz as descrições da experiência por eles vivida na produção do conhecimento de

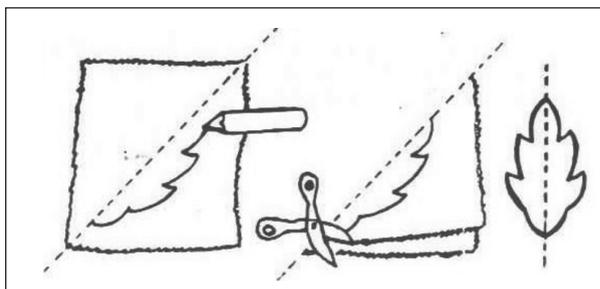
simetria e se abre à interpretação. Tais descrições relatam o percebido. Para sua análise, optamos pelos procedimentos da pesquisa fenomenológica. Tal opção deu-se pelo fato de entendermos que “a investigação fenomenológica trabalha [...] com o que se apresenta como significativo ou relevante no contexto no qual a percepção e a manifestação ocorrem” (BICUDO, 2000, p.74). Procurando compreender o que nessas descrições era revelado, caminhamos na direção da interpretação dos discursos, seguindo a orientação fenomenológica. Realizamos a análise dos dados da pesquisa em dois momentos. Em um primeiro momento, procuramos trechos reveladores do discurso do aluno. Em um segundo momento, procuramos por aspectos comuns nas falas dos alunos, visando convergências que permitissem a construção de categorias abertas. Tais categorias, ao serem interpretadas, nos mostravam o modo pelo qual o conteúdo simetria fazia sentido para o aluno. As duas categorias construídas - *Compreensão da simetria e suas propriedades* e *Investigação: processo de argumentação e validação de raciocínio* - evidenciam momentos de levantamento de hipóteses, formulação de conjecturas e exposição de argumentações.

Trazemos, a seguir, duas tarefas construídas para o trabalho com simetria envolvendo a simetria de reflexão. Uma das tarefas apresenta o trabalho com dobraduras e, a outra, o enunciado do problema proposto de forma escrita, valendo-se da linguagem corrente. Procuramos, a cada tarefa, mostrar o movimento de compreensão que pôde ser percebido no diálogo com os alunos.

## **4 Construção de uma sequência didática para o trabalho com simetria no Ensino Fundamental**

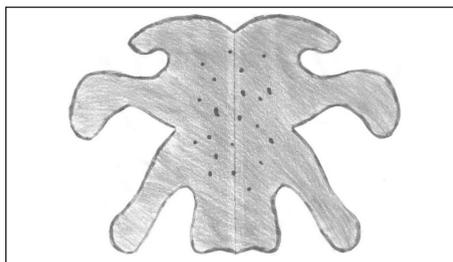
### **4.1 Tarefa com dobras**

A primeira atividade realizada com os alunos abordava a simetria de reflexão, com o eixo de simetria interno à figura. Para o seu desenvolvimento foram distribuídas aos alunos folhas de papel A4 em branco. Solicitamos aos alunos que dobrassem a folha ao meio e desenhassem, junto ao lado dobrado, o contorno de uma figura qualquer (Figura 1). Em seguida, solicitamos aos alunos que recortassem o contorno da figura que haviam desenhado, ainda com a folha dobrada. Após efetuarem o recorte, os alunos abriram a folha dobrada e viram o que havia acontecido com a figura.



**Figura 1** – Reflexão com dobra. Fonte: Ochi et al., 1992

Na Figura 2, apresentamos um exemplo da tarefa realizada por um dos alunos:



**Figura 2** – Reflexão com dobra: eixo de simetria interno

Iniciou-se, então, o diálogo com os alunos a respeito do que estavam realizando. Os problemas eram propostos oralmente, enquanto os alunos realizavam as dobras.

*Professor: Se eu pegar uma tesoura e com a folha dobrada recortar essa figura o que vocês acham que vai acontecer?*

*Aluno<sub>1</sub>: O outro lado vai ficar igual.*

*Aluno<sub>2</sub>: Vai ficar um molde atrás dessa parte.*

*Aluno<sub>3</sub>: O outro lado ficou igual.*

*Aluno<sub>5</sub>: Deu certo, porque quando você dobra no meio, a figura fica a mesma do outro lado.*

*Professor: Então aquela dobra dividiu a figura em duas partes. O que a gente pode falar dessas duas partes?*

*Aluno<sub>7</sub>: Que elas são iguais /.../ só que uma parte de um lado e a outra para o outro.*

*Aluno<sub>8</sub>: É tipo um espelho porque do jeito que eu cortei ficou do outro lado.*

Nessa situação em que exploramos a simetria de reflexão com o eixo interno à figura, o diálogo empreendido mostra-nos que os alunos percebem que a parte simétrica da figura *deve ser idêntica* à parte original. No diálogo mostra-se que a percepção do *ser idêntico* é uma característica da simetria compreendida pelos alunos. Considerando essa compreensão, fomos questionando os alunos para que as operações de simetria pudessem ser observadas de modo a possibilitarem a construção da ideia de que figuras simétricas mantêm inalteradas as distâncias entre seus pontos e o eixo de simetria, bem como observarem a amplitude dos ângulos que se sobrepõem pela dobra a partir do eixo de simetria.

A fala do aluno<sub>5</sub> de que “*Deu certo, porque quando você dobra no meio, a figura fica a mesma do outro lado*” revela a percepção do *ser idêntico*. Isso nos fez pensar na possibilidade de classificar figuras simétricas como congruentes. Passamos, então, a explorar a fala do aluno e fomos remetidos a uma compreensão inicial de que, para ele, as figuras simétricas podem ser sobrepostas (no caso da simetria de reflexão, nos referimos à sobreposição verificada ao dobrarmos uma folha de papel, por exemplo). Ou seja, o aluno utiliza-se da sobreposição para argumentar que a sua figura *deu certo*. Isso nos mostra o modo pelo qual o aluno vai investigando se uma figura é, ou não, simétrica. Ele vê que se as figuras são simétricas, então elas devem se sobrepor.

Percebendo essa característica identificada pelo aluno, encaminhamos as explorações para que eles compreendessem que o fato de as figuras se sobreporem indicava que figuras simétricas preservam suas medidas e sua forma. Dobrando a folha, os alunos percebem que uma figura ocupa *a mesma* área que a outra, e confirmam sua hipótese de que as figuras são *idênticas* e, conseqüentemente, simétricas.

Confirmou-se, para nós, a hipótese de que a percepção de figuras (ou de partes da figura) simétricas como idênticas e o entendimento de que figuras (ou partes da figura) simétricas podem ser sobrepostas, apontam para uma compreensão intuitiva de congruência de figuras planas. Essas características, comuns às diferentes operações de simetria, são aos poucos compreendidas pelos alunos no transcórre das atividades, e vão sendo usadas por eles para expressar o percebido. Vê-se, pois, um movimento de produção do conhecimento matemático que, partindo da exploração intuitiva, vai permitindo, pela investigação, a aquisição da linguagem e a compreensão das ideias matemáticas relativas às características da simetria de reflexão.

Passamos a uma nova tarefa, com a intenção de ver se os alunos eram capazes de, usando outro tipo de registro, construir a simetria.

## 4.2 A ambulância

Após explorarmos algumas características da simetria de reflexão por meio de tarefas com dobras e da resolução de problemas expressos oralmente, propusemos aos alunos a resolução de uma situação-problema apresentada na forma escrita.

O Corpo de Bombeiros da cidade A renovou sua frota de ambulâncias. Para facilitar a identificação dos veículos nas ruas da cidade, o chefe da corporação pediu para que fosse pintada na parte frontal das ambulâncias a palavra RESGATE. Dessa forma, qualquer motorista poderia identificar o veículo oficial através do espelho retrovisor de seu carro. De que maneira a palavra RESGATE deve ser pintada nas ambulâncias para que o motorista do carro à frente consiga ler corretamente a palavra pintada através de seu espelho retrovisor?

Nessa atividade, esperava-se que os alunos percebessem a inversão provocada pela simetria de reflexão, já discutida nas atividades iniciais, e associassem a palavra que deveria ser escrita na parte frontal da ambulância à sua imagem em um espelho.

Após a leitura do problema, iniciou-se o diálogo com os alunos, levantando hipóteses sobre como a palavra RESGATE deveria ser escrita.

*Aluno<sub>16</sub>: Vai ter que escrever a resposta ou vai ter que desenhar a resposta?*

*Aluno<sub>3</sub>: Tem que pegar ao contrário pra ele enxergar no retrovisor.*

*Aluno<sub>15</sub>: A gente escreveu de trás pra frente.*

*Aluno<sub>4</sub>: Professor, tipo assim, tá marcado aqui do lado que é para escrever. Você coloca do lado ao contrário, aí você vira a folha e dá pra você ler certo.*

*Professor: Por que escrever do lado ao contrário?*

*Aluno<sub>13</sub>: Pra poder olhar no retrovisor do carro [...] pra enxergar direito.*

*Aluno<sub>7</sub>: Professor, não é só escrever de trás pra frente; tem que inverter as letras também, tipo escrever de trás pra frente vai formar outra palavra. Tem que inverter as letras.*

*Professor: Vocês inverteram as letras? [...] Todas elas?*

*Aluno<sub>2</sub>: Menos o T e o A porque ele tem dois lados iguais. As letras têm dois lados iguais.*

*Aluno<sub>4</sub>: É, tem que escrever do lado ao contrário, de trás pra frente.*

*Professor: Vocês perceberam que não precisamos alterar o formato do A e do T porque, como vocês falaram, eles têm os dois lados iguais. [...] Isso tem um nome. Alguém lembra qual é esse nome?*

Aluno<sub>18</sub>: Reflexão.

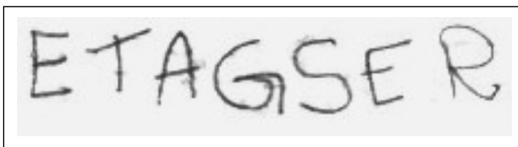
Aluno<sub>1</sub>: Simétricas.

Professor: Que tipo de simetria nós temos nesse problema?

Aluno<sub>19</sub>: Reflexão.

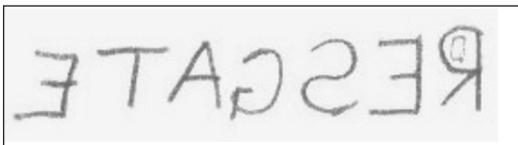
O diálogo no qual os alunos se envolvem ao discutirem a tarefa proposta revela que eles estão se apropriando do vocabulário, identificando e nomeando corretamente a operação de simetria envolvida no problema que estava sendo explorado. Após ser questionado, o aluno<sub>19</sub> afirma que o tipo de simetria utilizada é *reflexão*.

Nessa situação, em que exploramos a operação de simetria de reflexão relacionada à imagem refletida em um espelho, o diálogo entre os alunos a respeito de como deveria ser escrita a palavra RESGATE vai mostrando a produção do conhecimento num movimento dinâmico. O aluno<sub>15</sub> afirma que “a gente escreveu de trás pra frente” e apresenta a escrita conforme mostramos abaixo.



**Figura 3** – Solução apresentada pelo Aluno<sub>15</sub>

Porém, o colega argumenta que “não é só escrever de trás pra frente; tem que inverter as letras também, tipo escrever de trás pra frente vai formar outra palavra. Tem que inverter as letras” (Aluno<sub>7</sub>). E apresenta a seguinte escrita:



**Figura 4** – Solução apresentada pelo Aluno<sub>7</sub>

O estar junto com o outro e o desafio da tarefa fazem com que o conhecimento de simetria vá se estruturando a partir da resolução do problema que os põem atentos ao que fazer. Considerando o que foi dito por seu colega, o aluno<sub>7</sub> procura um modo de expressar o que percebe. A organização do percebido, compreendido e expresso, leva-os ao entendimento do tipo de inversão que é provocada pela simetria de reflexão.

No que diz respeito à compreensão da ideia de simetria de reflexão, chama-nos a atenção duas características identificadas: não somente a percepção da inversão provocada pela simetria de reflexão, mas também o reconhecimento de figuras (no caso as letras) com simetria bilateral.

No que se refere a esse aspecto, a fala do aluno<sub>2</sub> revela que ele compreende que nem todas as letras precisam ser invertidas. Ao ser questionado pelo professor, ele afirma que as letras “T e A [...] têm dois lados iguais. As letras têm dois lados iguais”, ou seja, já são simétricas e por isso não precisam ser *invertidas*.

No transcorrer das atividades, o objetivo principal era a produção do conhecimento de simetria pelo aluno. Durante os diálogos realizados, buscava-se sistematizar o que era dito procurando tornar-lhes conhecidos os *nomes dos movimentos de simetria* que, pela expressão, eles mostravam perceber. As propriedades descritas, fazendo uso da linguagem informal e favorecida pela exploração intuitiva, como a percepção da equidistância de pontos simétricos, também eram sistematizadas para que os alunos pudessem, gradativamente, construir a linguagem formal.

As análises que empreendemos na pesquisa de mestrado, da qual trazemos apenas uma pequena parte neste texto, permitem-nos dizer que o expresso pelos alunos nos indica que as tarefas realizadas se mostraram significativas à produção do conhecimento de simetria de reflexão, uma vez que os alunos identificaram propriedades e foram capazes de argumentar sobre as características percebidas, justificando suas ideias.

## **5 Considerações finais**

Ao optarmos por abordar a produção do conhecimento de simetria através da resolução de problemas não desejamos propor uma *receita* para o ensino de simetria, tampouco sugerir um ensino de simetria despreocupado com a linguagem e o rigor matemático. Vimos, na resolução de problemas, uma maneira de os alunos produzirem esse conhecimento formal de simetria a partir da intuição, exploração e investigação, sempre considerando a relevância da mediação do professor.

As concepções por nós assumidas de que o conhecimento é produzido pelo aluno, e não transmitido ao aluno; de que os alunos devem compreender os conceitos, e não memorizá-los; de que a aprendizagem geométrica inicia-se, sobretudo, a partir de atividades de caráter experimental, onde se valoriza a

percepção e expressão do raciocínio, se refletiram na elaboração e no desenvolvimento das tarefas a serem trabalhadas com os alunos. Vimos que os alunos chegaram à compreensão da simetria e de propriedades de figuras simétricas devido ao caráter investigativo inerente à atividade de resolução de problemas. Esse aspecto investigativo, por sua vez, servia de base para que os alunos construíssem argumentações e buscassem, pela expressão, validar o raciocínio construído acerca do tema simetria.

Compreendemos que a resolução de problemas mostrou-se significativa à aprendizagem do aluno, favorecendo a constituição de um ambiente de investigação em que, pelo diálogo, a compreensão ia se expondo, se articulando em modos de interpretação e fazendo sentido ao grupo de alunos. Portanto, entendemos que o ensino de simetria através da resolução de problemas é uma opção que pode ser levada em conta por professores de Matemática que atuam no Ensino Fundamental, uma vez que dá-nos a opção de levar o aluno à produção do conhecimento.

## Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEN**, Rio de Janeiro, v. 33, n. 55, p. 133-156, jul./dez. 2009.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa segundo uma visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2010.

BICUDO, M. A. V. O professor de matemática nas escolas de 1º e de 2º graus. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005. p. 45-57.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez, 2000.

BILAC, C. U. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do cabri-géomètre**. 2008. 194 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. 3. ed. Brasília: MEC, 1998.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, Florianópolis, v. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MEGA, E. **Ensino/ aprendizagem da rotação na 5ª série:** um estudo comparativo em relação ao material utilizado. 2001. 284 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

OCHI, F. H. et al. **O uso de quadriculados no ensino da geometria.** São Paulo: IME-USP, 1992.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/ aprender geometria? In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: USP, 2004. Disponível em: <[http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas\\_redondas/mr21-Regina.doc](http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc)>. Acesso em: 26 out. 2009.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria:** uma visão histórica. 1989. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, G. **O ensino de simetria no sétimo ano do Ensino Fundamental via resolução de problemas: uma análise fenomenológica.** 2011. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

**Submetido em Agosto de 2012.**  
**Aprovado em Fevereiro de 2013.**