



Hans Freudenthal:

“Não me chamem de advogado do diabo, sou o próprio diabo...”¹

Wim Neeleman²

Em 1976, realizou-se em Utrecht, Holanda, um simpósio internacional sobre ensino de Matemática. Hans Freudenthal falou sobre o tema “Ensino de Matemática no ano 2000”. (Em 1976, 2000 ainda estava bem distante!)

“Como será o ensino de Matemática no ano 2000? Há uma resposta simples. Já não haverá ensino de Matemática em 2000; terá sumido. Já não haverá uma disciplina, chamada Matemática, nem aulas de Matemática no programa, nem livros de Matemática para ensinar Matemática. . .³”

Foi nessa mesma ocasião que Freudenthal se auto-intitulou de “diabo”. Quem era esse estranho - visionário, idealista, sonhador ou doido?

Hans Freudenthal nasceu na Alemanha aos 17 de setembro de 1905. Estudou nas Universidades de Berlim e de Paris. A convite de L.E.J. Brouwer (o intuicionista), que na altura lecionava na Universidade de Amsterdam, Freudenthal mudou-se para a Holanda, que viria a ser sua segunda pátria. Durante a maior parte da sua vida lecionou Matemática na Universidade Estatal de Utrecht. Publicou vários trabalhos em diferentes áreas da Matemática - geometria, lógica, topologia, teoria de grupos de Lie e outras. Contribuiu também para a filosofia e história da ciência.

Desde cedo, Freudenthal mostra um vivo interesse pelo **ensino** e aos poucos a educação matemática transforma-se na sua preocupação principal.

Em 1955, Freudenthal se torna membro da ICMI (International Commission on Mathematics Instruction), como

¹ Digitalizado por Adriana Richit e Andriceli Richit.

² Mestrando em Educação Matemática pelo IGCE - UNESP - Rio Claro.

³ Wiskrant 4 p. 15 (Setembro 1976)



representante da Holanda. De 1963 a 1974 ele é membro do Comitê Executivo e em 1966 é eleito presidente, cargo que ocupa por um período de quatro anos. É no período em que Freudenthal é presidente da ICMI que se organiza o Iº ICME (Congresso Internacional sobre a Educação Matemática) em Lião (França) em 1968.

Em 1968 funda a revista *Educational Studies in Mathematics*, até hoje um dos principais periódicos na área da educação matemática.

Em 1971 é fundado em Utrecht o IOWO (*Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs*; Instituto para o Desenvolvimento do Ensino da Matemática), e Freudenthal é seu primeiro diretor. O IOWO tornar-se-á mundialmente conhecido e terá um papel decisivo na definição dos novos rumos que irá tomar o ensino de Matemática nas escolas holandesas.

Em 1976 Freudenthal se despede como diretor do Instituto. Mas continua trabalhando na área que era sua paixão. Passa boa parte de seu tempo assistindo a aulas de Matemática em diversas escolas; observando os jovens trabalhando, discutindo e descobrindo Matemática.

Não são muitos os autores em educação Matemática que se podem equiparar a Hans Freudenthal quanto à produção literária: escreveu literalmente centenas de artigos, em holandês, alemão, Frances e inglês, abordando quase todos os aspectos da educação matemática. Os três livros mais conhecidos de Freudenthal na área de educação matemática são, por ordem cronológica, “*Mathematics as an educational task*” (“Matemática como tarefa educacional”), “*Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*” (“Capinar e Semear. Prefácio a uma ciência de educação matemática”) e “*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*” (“Fenomenologia didática de estruturas matemáticas”)⁴.

Como holandês e professor de Matemática, pertenço a uma geração que foi profundamente influenciada pelas idéias de Freudenthal. Era conhecido menos pelos livros mencionados acima do que por seus artigos em publicações sobre educação

⁴ Dordrecht: Reidel, 1973, 1978 e 1983, respectivamente.

matemática e sobre ensino, por suas intervenções em conferências e reuniões. Mas seria errado pensar que todos os professores holandeses se tornaram “freudenthalistas”. Sua influência foi talvez mais profunda por causa das questões inquietantes que colocava e pela forma irreverente como as formulava do que pelas respostas que dava.

Freudenthal escreveu detalhadas resenhas de livros didáticos, temidas por autores e editores, e conhecidas por grande parte dos professores holandeses. Por vários anos mantinha o hábito de analisar detalhadamente os exames nacionais⁵. Mostrava como muitas das perguntas só mediam o grau de memorização de técnicas algorítmicas ou ainda a habilidade do aluno de não se deixar enganar pelo examinador! Suas críticas certamente contribuíram para melhorar a qualidade de livros didáticos e estimularam uma análise mais profunda do papel dos exames.

Freudenthal estava convencido da importância da crítica. Dedicava muito do seu tempo a fazer uma crítica seria, sistemática e detalhada do trabalho de pesquisadores na área de educação matemática. Os inúmeros artigos críticos de Freudenthal visaram a separar o trigo do joio numa área ainda obscurecida por pseudo-erudição, extrapolações apressadas à base de experimentos mal projetados e supostas aplicações de teorias gerais de aprendizagem ao ensino de Matemática.

Caracterizar o pensamento de Hans Freudenthal de forma resumida não é tarefa fácil. Ele escapa aos rótulos que costumamos colar nas diferentes tendências em nossa área. Freudenthal não quis construir um “sistema”, nem fundar uma “escola”.

Freudenthal defende que a Matemática é uma atividade e que a melhor forma de aprender uma atividade é executá-la. Ensinar Matemática conforme um sistema dedutivo só é possível para quem encara a Matemática como um corpo de conhecimentos, um produto pronto para consumo. A Matemática como atividade, a criança só aprende re-inventando-a, re-criando-a.

Ao apresentar um resultado matemático num artigo, o autor costuma inverter a ordem em que chegou a esse resultado. Inversão é uma mudança de perspectiva, que é típica do pensamento matemático. O que sob uma perspectiva são axiomas, sob outra são teoremas derivados; definições transformam-se em proposições e vice-versa. A inversão pode facilitar a compreensão e, neste caso, ela é inversão didática. Muitas vezes, porém, ela acaba sendo antdidática! “Em vez de proceder de maneira

⁵ Na Holanda há exames nacionais no fim do ensino secundário; não há vestibular.

antididática, devia-se reconhecer que o jovem que aprende tem o direito de recapitular, de certa forma, o processo de aprendizagem da humanidade”.⁶

Freudenthal baseia-se em parte na teoria de **níveis** do casal van Hiele. Os van Hiele constataram que a aprendizagem não é um processo contínuo. Há **saltos** no processo de aprendizagem, e esses saltos tem um grande valor motivador. Os saltos revelam a existência de níveis relativamente distintos. O que é ação a um nível se torna objeto de análise no nível superior. A preocupação dos van Hiele era ajudar o aluno a atingir um nível superior, a fazer o salto...

É possível ensinar um aluno habilidoso acima do seu nível real, dando-lhe os algoritmos sem qualquer referência ao seu sentido e treinando-o através de uma pilha de exercícios padronizados. Se o objetivo é que o aluno seja aprovado na próxima prova, isso pode funcionar. Mas se queremos que o aluno atinja níveis cada vez superiores, teremos que lhe dar a oportunidade de chegar lá. Isto implica atividades que preparam o salto; é este o significado de “re-inventar”. Implica também que atividades em um nível básico só têm, sentido, se a criança está preparada para progredir ao nível seguinte. O problema com muitas atividades com “material concreto” e também com os experimentos que Z. Dienes executava é que não preparavam para nada⁷.

É praticamente impossível prever que Matemática os jovens de hoje vão precisar no futuro. Mas uma coisa é possível afirmar: é altamente improvável que o aluno vá ser um matemático. Freudenthal defende uma Matemática **para todos**, e esta só pode ser uma Matemática **para a vida**.

Rejeitar uma matemática que prepara para ser matemático não significa ensinar uma matemática desconexa. Pelo contrário, Freudenthal quer uma matemática “carregada de relações”. Mas o que é uma relação natural para o professor não o é necessariamente para o aluno. Em vez de relações intramatemáticas, o que importa são os pontos de contato com a realidade vivida pela criança. É a realidade que dá coerência à matemática aprendida. Aos poucos, as relações internas vão se desenvolvendo, e entre elas as relações dedutivas⁸.

Com essas idéias sobre educação Matemática, não é de estranhar que Hans Freudenthal estivesse entre os primeiros críticos ao movimento da chamada

⁶ Didactical Phenomenology. . . p. ix.

⁷ Mathematics as an Educational Task p. 125-127.

⁸ Mathematics as an Educational Task p. 68- 78.

“matemática moderna”. Aliás, numa carta a Geoffrey Howson em 1983, ele confessa: “O maior erro que já fiz em educação matemática foi minha decisão de não participar do seminário de Royaumont em 1958” (foi neste seminário que o movimento da “matemática moderna” foi lançado na Europa)⁹. Freudenthal disse já ter participado em tantos congressos disparatados e achava que este seria simplesmente mais um. Quando se deu conta que neste congresso o “disparate” tinha sido levado a sério até por alguns governos, já era tarde para evitar o desastre.

A Matemática moderna, como ela foi introduzida nos currículos escolares de praticamente todos os países do mundo, é um exemplo típico do que Freudenthal chama de “inversão antididática”. Ela toma o formal, o matemático, como o princípio organizador dos conteúdos a serem ensinados. Daí aos conjuntos um lugar de destaque, dada a sua suposta função unificadora, introduzindo na escola primária uma série de formalismos com uma função comunicativa duvidosa e uma função algorítmica que não ultrapassa os limites de joguinhos¹⁰. Só vê o aspecto cardinal na abordagem do número, desprezando o aspecto ordinal, o que não só didaticamente, mas também matematicamente, é insuficiente¹¹. Realça as estruturas algébricas como ponto de partida, ignorando que formalizar é o ponto final de um processo que requer trabalho prévio em múltiplos contextos.

Enquanto o movimento da matemática moderna praticamente banuiu a geometria dos currículos, Freudenthal sempre defendia sua inclusão na aprendizagem matemática o mais cedo possível. Não que tenha defendido a geometria euclidiana como o treino ideal para pensar dedutivamente!

Matemática é **organizar** áreas de experiência, e a geometria, no sentido de matematizar as experiências espaciais, pode dar uma ótima oportunidade para a criança experimentar a organização **local**. Matematizar não é apenas abstrair, às vezes é preciso **concretizar**, e resolver problemas (mais ou menos abstratos) através de concretizações geométricas e uma atividade tipicamente matemática. Há muita geometria nos assuntos tratados tradicionalmente nas escolas, mas que não são consideradas geometria; além disso, há muitos conceitos por si sós não geométricos, como proporções, que podem ser abordados geometricamente. E geometria nesse sentido que deve ser a nossa meta, não a

⁹ Citado em Howson, G: “Hans Freudenthal and the Foundation of a Discipline of Mathematics Education”, *Nieuwe Wiskrant* 5(1) 68-72 (Setembro 1985).

¹⁰ Ver, por exemplo. *Didactical Phenomenology*. . . p. 72.

¹¹ Ver, por exemplo, *Mathematics as an Educational Task* p. 181.

expressão verbal de uma organização **global** que os defensores do rigor axiomático querem¹².

“*Weeding and sowing*” tem como subtítulo “Prefácio a uma ciência de educação matemática”. Apenas “prefácio”, porque ainda não existe uma ciência de educação matemática. E - pior ainda - o nascimento desta ciência é seriamente impedido pela idéia sem fundamento de que ela já existe, escreve Freudenthal¹³.

Como Freudenthal aprecia a pesquisa em educação matemática, fica claro quando, na conferência proferida no ICME-4 em Berkeley em 1980, chega a incluir a pesquisa na lista dos 13 **maiores problemas** da educação matemática¹⁴! Mas não se limita a uma crítica geral. Em inúmeros artigos analisa detalhadamente (e sempre com humor mordaz) toda espécie de pesquisa, desvendando os disparates cometidos pelos pesquisadores.

Quanto à pesquisa quantitativa, estatística, seu juízo é: “em geral, seu valor e desolador; trata-se de material recolhido de forma inadequada, elaborado com métodos matemáticos aplicados de forma inadequada ou por si sós inadequados, como a regressão linear; em suma: inútil”¹⁵

O outro tipo de pesquisa constantemente criticado por Freudenthal é aquele que projeta na aprendizagem todas as suas idéias preconcebidas, ou seja, praticamente toda a pesquisa que se diz baseada em “resultados” da psicologia, da sociologia ou de teorias gerais de aprendizagem.

Freudenthal criticava o pensamento linear; lembra-nos constantemente que as coisas não são tão simples. Os psicólogos costumam afirmar que o concreto antecede o formal. Mas uma criança que recita uma série de números, *vinteum*, *vintedois*, *vintetrês*. . .faz um trabalho puramente formal! Há diferentes tipos de formalismo; alguns podem ser alcançados por todos, outros só poucos conseguem atingir. A aritmética é tipicamente formal; na geometria a formalização só vem mais tarde¹⁶.

Ficou mundialmente conhecida a dura crítica que Freudenthal fazia a Piaget e seus discípulos. Nos seus artigos mostra que Piaget simplesmente não entendeu muitos

¹² Ver, por exemplo, *Weeding and Sowing*- . .p. 276-292.

¹³ *Weeding and Sowing*... p. V.

¹⁴ reproduzida em *Educ. Stud. Maths.* 12(2) p. 133-150.

¹⁵ Vrijenhoef H: “Ontboezemingen van een voorman uit de wetenschap. Prof. Dr. Hans Freudenthal over onderwijs en onderwijsbeleid”, *Didaktief* 13(1), 21-25 (Janeiro de 1983).

¹⁶ Jansen, H. M. M, e S. L. Kemme: “Hans Freudenthal; een interview”, *Nieuwe Wiskrant* 8(3) p. 35 (Maio 1989).

conceitos matemáticos como espaço (topológico, projetivo e euclidiano), número cardinal e ordinal, transformação, etc. e que muitos dos seus experimentos testam o domínio lingüístico em vez do matemático¹⁷. Piaget pensava erroneamente ter provado a correspondência entre as estruturas lógico-matemáticas de Bourbaki e os estágios no desenvolvimento cognitivo da criança, o que levou seus seguidores a elevar isto a um princípio didático, com conseqüências nefastas. Piaget nos deixou toda uma terminologia (que virou moda entre educadores), que é mais sugestiva do que explicativa. Como mostra Freudenthal, termos como “conservação” e “reversibilidade” criaram sérios impedimentos a uma pesquisa relevante para o ensino de matemática¹⁸.

O psicólogo no seu laboratório tira fotografias instantâneas, perdendo de vista o **processo** de aprendizagem. Para entender como uma criança aprende, não seria mais simples se começássemos por assistir a aulas numa escola qualquer, observando bem o que se passa, num processo ininterrupto, estabelecendo relações, usando o nosso senso comum?

Era o que Freudenthal fazia: observar. Não só em escolas. Também em casa, na mesa do jantar, nos passeios com seus netos. Um desses netos, Bastiaan, foi eternizado por Freudenthal na literatura sobre educação matemática. Bastiaan serviu de ponto de partida para análises sobre a aprendizagem e de contra-exemplo às generalizações dos psicólogos!

Observar também era o lema do IOWO. Não é por mero acaso que no seu nome figura o desenvolvimento do ensino e não simplesmente o desenvolvimento curricular. Para os colaboradores do Instituto, o desenvolvimento curricular deve ser uma atividade de sala de aula. O IOWO foi único na história da educação matemática na Holanda, na medida em que reunia em si aspectos tradicionalmente divididos por instituições separadas.

Os colaboradores observavam aulas, desenvolviam material didático, testavam esse material na escola, avaliavam e adaptavam o material em conjunto com professores e alunos; organizavam a formação-em-serviço e desenvolviam material para a formação de professores; editavam duas revistas para professores primários e secundários, respectivamente. Foi, de fato, a primeira tentativa na história de preparar professores primários para trabalhar com uma matemática que era mais do que a tradicional

¹⁷ Mathematics as an Educational Task p. 662-677.

¹⁸ Didactical Phenomenology. . . p. 21.

aritmética. O IOWO teve sempre o cuidado de manter a comunicação entre todos os envolvidos, evitando afastar “especialistas” de professores¹⁹.

A abordagem integrada não era do agrado dos políticos holandeses. Apesar de apelos internacionais, em 1981 o subsídio foi definitivamente cortado, e o Instituto fechou as suas portas²⁰.

Em “*Didactical Phenomenology*” Freudenthal escreve: “Os nossos conceitos, as nossas estruturas e idéias Matemáticas foram inventadas como ferramentas para organizar os fenômenos do mundo físico, social e mental”. Descrever esses conceitos nas suas múltiplas relações com os fenômenos para os quais foram criados e aos quais foram estendidos é o que ele chama de “fenomenologia”. Na medida em que a descrição se refere ao processo de aprendizagem da nova geração, pode ser chamada de “fenomenologia didática”, uma maneira de mostrar a quem ensina os pontos onde quem aprende poderia entrar no processo de aprendizagem da humanidade²¹.

Freudenthal critica a idéia de “*concept attainment*” que equipara aprender a aquisição de conceitos. Crianças, diz Freudenthal, aprendem o que é uma cadeira, o que é comida ou saúde; mas não porque lhes ensinamos os **conceitos** de cadeira, comida ou saúde. A matemática não é exceção a essa regra. “Crianças aprendem o que é número, o que são círculos, o que é somar, o que é desenhar um gráfico. Apreendem-nos como objetos **mentais** e executam-nos como **atividades mentais**. Querer ensinar o **conceito** de número é outro exemplo de uma inversão antididática”²².

Uma fenomenologia didática pode preparar a abordagem inversa: começar a partir dos fenômenos que requerem organização e daí ensinar o aluno a manipular os meios de organizar. . . Para ensinar grupos, em vez de começar pelo conceito de grupo e procurar material que concretize este conceito, devem-se primeiro procurar fenômenos que possam obrigar o aprendiz a constituir o objeto mental que é matematizado pelo conceito de grupo. Se a certa idade esses fenômenos não estão disponíveis, desiste-se

¹⁹ Infelizmente, a maior parte do material desenvolvido pelo IOWO só existe em holandês. Quem quiser ter uma primeira impressão do seu trabalho pode consultar Educ. Stud. Maths. 7(3) (August 1976), dedicado ao quinto aniversário do Instituto. Vários artigos escritos por colaboradores do Instituto apareceram em Educ. Stud. Maths.

²⁰ Uma pequena parte do trabalho do IOWO prossegue no “OW&OC”, departamento da Universidade de Utrecht para a pesquisa de educação matemática, que a partir de setembro de 1991 será chamado “Instituto Freudenthal”.

²¹ Didactical Phenomenology. . . p. ix e 28.

²² Didactical Phenomenology. . . p. x.

das tentativas -inúteis - de incutir o conceito de grupo²³.

Bolema nº 4 continha uma resenha crítica da "*Didactical Phenomenology*" da autoria da Prof^a Maria Bicudo²⁴. Freudenthal provavelmente não chegou a ler o artigo, mas, se o tivesse, certamente não teria gostado de ser comparado aos fenomenólogos. Ao chamar seu método de "fenomenologia", ele adverte: "Claro que não entendo 'fenomenologia' no sentido que poderia ser extraído das obras de Hegel, Husserl e Heidegger", e acrescenta, numa nota de rodapé, no seu estilo característico: "Será por acaso que - incluindo Habermas - os nomes dos mais pretensiosos produtores de falação ininteligível na filosofia alemã começam por H?²⁵"

A questão da ontologia dos objetos matemáticos, colocada no artigo da Prof^a Bicudo, Freudenthal teria considerado irrelevante, porque sua resposta não influenciaria em nada sua prática de educador. "Não importa se são objetivos, geneticamente determinados ou adquiridos ao longo do desenvolvimento", disse, num. outro contexto²⁶.

O que Freudenthal faz nos sucessivos capítulos do seu livro é uma "fenomenologia" dos principais conceitos da matemática elementar. Em parte é uma "fenomenologia matemática", pressupondo da parte do leitor um conhecimento matemático além do elementar. Freudenthal nunca deixou de ser matemático e exige do professor de Matemática uma compreensão profunda da Matemática - pelo menos daquela Matemática que ensina.

É a falta de uma fenomenologia precedente que faz com que a maior parte das pesquisas em educação matemática tenha falhado²⁷. Para uma tal fenomenologia é necessário (mas não suficiente!) ter um conhecimento sólido de Matemática e não basta ser "especialista em educação".

Mas também avisa: "Não há compreensão definitiva em matemática, qualquer problema pode ser compreendido num contexto cada vez mais amplo, de um ponto de vista cada vez superior; e finalmente - parece o mais baixo de todos, mas é talvez o mais alto - você pode compreender o problema na perspeiciiva da criança que aprende ²⁸,"

²³ Didactical Phenomenology... p. 32.

²⁴ BOLEMA nº 4 p. 59-64.

²⁵ Didactical Phenomenology. . . p. 28.

²⁶ Didactical Phenomenology... p. 247.

²⁷ Didactical Phenomenology. . . p. 10.

²⁸ "Teacher training - an experimental philosophy" Educ. Stud. Maths. 8(1977) p. 374.

Pelo que pude verificar, Freudenthal visitou a América do Sul em duas ocasiões. Em novembro de 1972, participou como conferencista convidado no III CIAEM em Bahia Blanca (Argentina). Na sua conferência falava do trabalho realizado pelo IOWO e suas idéias subjacentes.

Em julho de 1984 foi convidado a participar no Iº Congresso Internacional de Educação Piagetiana, organizado por Lauro de Oliveira Lima, que se realizou no Rio de Janeiro. Freudenthal mostrou seu constrangimento com o convite, porque o título do Congresso parecia indicar que teria que falar bem de Piaget! A sua conferência continha a mesma crítica que já tinha formulado em tantas ocasiões. Mas os organizadores parecem não ter gostado. Nos anais do congresso, a presença de Freudenthal é simplesmente ignorada, como também aconteceu com a outra pessoa que tinha ousado criticar Piaget: Ubiratan d'Ambrósio²⁹.

Muito pouco do que Freudenthal escreveu foi traduzido para o português. De fato, só tenho conhecimento de um único livro: “*Perspectivas da Matemática*”³⁰. O livro discute alguns conceitos matemáticos com a riqueza de relações com o mundo real que é característica de Freudenthal. Mas o livro não aborda o ensino. Quem quiser travar conhecimento com o pensamento de Freudenthal terá que recorrer as publicações em inglês.

Em 13 de outubro de 1990, com 85 anos extremamente fecundos, Hans Freudenthal faleceu. Será lembrado por todos quantos se importem com o ensino de matemática no mundo inteiro. A forma mais digna de honrar sua memória é dando continuação ao trabalho por ele iniciado.

²⁹ A informação sobre os dois congressos foi-me fornecida pelo Profº U. d'Ambrósio.

³⁰ Zahar, Rio de Janeiro 1975. O original, “Mathematics Observed”, é de 1967. A tradução é de Fernando C. Lima.