



As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias

Demonstrations in the Teaching of Geometry: discussions on teacher education through the use of new technologies

Emilia Barra Ferreira¹

Adriana Benevides Soares²

Josefino Cabral Lima³

Resumo

Este trabalho descreve uma pesquisa realizada junto a professores de Matemática objetivando investigar a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica em sua formação, no sentido de incentivá-los ao uso das demonstrações no ensino da Geometria. Considerando-se as demonstrações, pela própria natureza da Matemática, elemento fundamental na construção do conhecimento geométrico, a proposta foi que dificuldades, geralmente encontradas na necessária passagem do conhecimento de natureza empírica àquele de natureza formal, podem ser minimizadas ou superadas através de trabalho em ambientes que possibilitem o experimentar, visualizar, conjecturar, generalizar e demonstrar, como propõem os ambientes de geometria dinâmica. A análise feita baseou-se em estudos de Piaget (1983), de Van Hiele (1959) e da Didática da Matemática (BROUSSEAU, 1986, DUVAL, 1995). Desenvolveu-se uma engenharia didática no ambiente proposto e os resultados sugerem que tal trabalho se constitui numa alternativa eficiente

¹ Mestre em Informática, docente da rede pública de ensino em Angra dos Reis e Tutora da Fundação CECIERJ/ CEDERJ. Endereço: Rua Professor Lima, 225, Angra dos Reis, 23900.000. RJ. E-mail: ebarraferreira@yahoo.com.br.

² Doutora em Ciências Cognitivas, docente titular do Mestrado em Psicologia da UNIVERSO e docente adjunta do InstitUERJ, UERJ. Endereço: Av. Bartolomeu Mitre, 390/402, Leblon, 22431-000, RJ. E-mail: adribenevides@gmail.com.

³ Pós-doutorado em Computação e Professor titular da UFRJ. Endereço: Av. Bartolomeu Mitre, 390/402, Leblon, 22431-000, RJ. E-mail: clima@nce.ufjf.br.

no processo de formação de professores no sentido de incentivá-los ao uso das demonstrações.

Palavras-chave: Formação de Professores. Demonstrações. Geometria Dinâmica.

Abstract

This paper describes research conducted with mathematics teachers aiming to investigate the contribution of environments of dynamic geometry in their education, to encourage them to use demonstrations in the teaching of geometry. Considering demonstrations, which are by nature a key element in the construction of geometric knowledge, the proposal was that difficulties typically encountered in the necessary passage from empirical knowledge to formal knowledge, can be minimized or overcome through work in environments that allow experimentation, viewing, conjecturing, generalization and demonstration, as proposed by environments of dynamic geometry. The analysis was based on studies of Piaget (1983), Van Hiele (1959) and Didactic of Mathematics (BROUSSEAU, 1986, DUVAL, 1995). Didactic engineering was developed in the proposed environment, and the results suggest that such work is an effective alternative in the process of teacher education to encourage them to use demonstrations.

Keywords: Teacher Education. Demonstrations. Dynamic Geometry.

Introdução

A Matemática, de forma ímpar, por ser uma ciência derivada do pensamento puro, constitui-se essencialmente em um processo de construção mental. Suas atividades se caracterizam pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhadas das devidas demonstrações. E a resolução de seus problemas, especialmente em Geometria, pode requisitar a utilização de demonstrações. É natural, portanto, que se considere de suma importância a convivência e a prática das demonstrações por professores e estudantes, no processo educativo.

A realidade nas escolas, entretanto, não reflete essas concepções. Dentre as causas apontadas para a não utilização ou, até mesmo, para a tradicional abordagem⁴ das demonstrações no ensino e aprendizagem da

⁴ Uma abordagem das demonstrações é dita tradicional quando o aluno não participa de sua elaboração; elas são apresentadas prontas ao aluno que, por vezes, é obrigado a decorá-las, sem sequer entender seu significado.

Geometria, cita-se o fato de os professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de tal prática. Pesquisas apontam sérios problemas com a formação de professores de Matemática, a citar: Vianna (1988), Pavanello (1993); Lorenzato (1995), Gouvêa (1998), Belfort, Guimarães e Barbastefano (1999), Richit (2005).

Além do domínio do conteúdo que se ensina, é relevante o conhecimento didático desse conteúdo, pelo professor. Conhecimento este que o capacitará a encontrar maneiras adequadas de trabalhar os assuntos com os alunos. Nessa direção, muitos recursos são oferecidos pelas Tecnologias da Informação e da Comunicação que vêm, nos últimos anos, provocando uma verdadeira revolução em nossa maneira de trabalhar e de aprender. Especificamente, no âmbito de aplicação da tecnologia informática em educação matemática, o potencial dos ambientes de geometria dinâmica é investigado e discutido nacional e internacionalmente: Laborde e Capponi (1994); Hoyles e Jones (1998); Belfort, Guimarães e Barbastefano (1999); Laborde (2000); Hanna (2000); Gravina (2001); Zulatto (2002); Alves (2004).

Esses ambientes computacionais são direcionados à aprendizagem da Geometria oferecendo recursos que viabilizam as ações mentais dos alunos e podem ajudar na superação de dificuldades inerentes ao processo dessa aprendizagem, tais como: visualização, construção, raciocínio geométrico. Neles é possível criar condições para que se aprenda investigando, conjecturando, testando, analisando e concluindo acerca de um fenômeno estudado, transformando-se o aluno de mero expectador em agente do processo educativo, em alguém que pensa, reflete, dirige, decide e atua.

O objetivo da pesquisa em questão traduziu-se nas seguintes hipóteses: a) a utilização de ambientes de geometria dinâmica, no processo ensino e aprendizagem da Geometria, pode estimular a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos professores envolvidos; b) a utilização desses ambientes, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, pode contribuir para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

Considerando a complexidade do processo ensino e aprendizagem

das demonstrações, tanto para o aluno como para o professor, o embasamento teórico do estudo em questão contemplou uma reflexão sobre as demonstrações, em seus aspectos cognitivos e didáticos. Adotou-se, de acordo com Piaget (1983, 1995), que toda aprendizagem depende fundamentalmente de ações coordenadas do sujeito, quer sejam de caráter concreto ou de caráter abstrato. O conhecimento se constitui a partir das ações do sujeito sobre o meio, ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas, de menos acabadas para mais completas, com conseqüente ascensão de patamar do conhecimento.

Uma teoria acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico surgiu com os trabalhos dos professores holandeses Dina e Pierre Marie Van Hiele (1959) que compreendem o desenvolvimento do pensamento geométrico através de cinco níveis seqüenciais que informam quais são as características do processo de pensamento dos alunos em Geometria. São eles: a) visualização ou reconhecimento (nível 1), reconhece visualmente uma figura geométrica; b) análise (nível 2), identifica as propriedades de uma determinada figura sem fazer inclusão de classes; c) dedução informal ou ordenação (nível 3), é capaz de fazer a inclusão de classes e acompanhar uma prova formal sem, no entanto, construir uma outra; d) dedução formal (nível 4), elabora provas formais, raciocinando num contexto de um sistema matemático completo; e) rigor (nível 5), é capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas, quando as geometrias não euclidianas são, então, compreendidas.

O modelo de Van Hiele é um guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades dos alunos em Geometria.

Segundo Gravina (2001), a evolução do pensamento geométrico pode ser também entendida à luz da teoria de Piaget. A identificação das formas geométricas começa com as abstrações empíricas. A observação de propriedades não explícitas nos objetos geométricos, mediante experimentos do pensamento, corresponde às abstrações pseudo-empíricas.

Os teoremas e as demonstrações, por sua vez, relacionam-se com as abstrações reflexionantes, quando relações inferenciais tornam-se objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza lógico-dedutiva, o

que implica na construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento.

Em Duval (1995), encontramos outras contribuições para um melhor entendimento do processo ensino e aprendizagem da Geometria. O autor considera que não há conhecimento que possa ser mobilizado pelo sujeito sem uma atividade de representação e compreende diferentes formas de apreensão cognitiva da figura geométrica: a) apreensão seqüencial, a solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição na reprodução de uma figura; b) apreensão perceptiva, a que corresponde à interpretação da figura em uma situação geométrica; c) apreensão discursiva, a relacionada à interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados; d) apreensão operatória, que consiste numa apreensão central sobre possíveis modificações de uma figura de partida, ou seja, manipulações no desenho visando desprender e recompor novos subcomponentes do mesmo. A apreensão operatória proporciona a função heurística do desenho, tornando-o dessa forma em fonte de *insights* para o avanço do processo da demonstração.

Se o processo das demonstrações compreende duas fases, a de formulação de conjecturas e o da demonstração propriamente dita, a apreensão perceptiva subordinada à discursiva permite selecionar as propriedades das figuras, de acordo com as hipóteses determinadas no enunciado do problema, o que se constitui num dos principais acessos à demonstração. A apreensão operatória ligada ao processo de abstração reflexionante, provocando operações sobre os componentes figural e conceitual do objeto acompanhadas de sucessivos reflexionamentos, culminam com a argumentação dedutiva validando a hipótese proposta.

Conceitos da Escola Francesa foram adotados no sentido de orientar as escolhas didáticas a serem aplicadas na investigação. Na teoria das Situações Didáticas, (BROUSSEAU, 1986), encontra-se um estudo sobre fatos que devem ser levados em consideração ao se preparar e apresentar atividades sobre conteúdos matemáticos, visando realizar uma educação matemática mais significativa para o aprendiz. Nesse modelo, a situação didática se desenvolve em três fases: a fase da contextualização e devolução (o professor apresenta

um problema aos alunos despertando-lhes o desejo de resolvê-lo); a fase da situação adidática⁵, compreendendo os momentos de ação, formulação e validação em que o aluno, na busca da solução do problema, realiza ações mais imediatas produzindo conhecimento de natureza experimental e que, na formulação, deve ser corroborado por uma validação semântica e sintática; terceira fase, de institucionalização, quando os alunos são levados a assumir o significado socialmente estabelecido de um saber por eles elaborado.

No desenvolvimento das atividades da pesquisa em questão, o professor participante atuou como aluno e o pesquisador como professor ou orientador. A expectativa era que o professor, como aluno, além de ter a oportunidade de rever, consolidar e/ou evoluir em seus conhecimentos geométricos, tivesse a oportunidade de vivenciar e dimensionar situações que favoreçam a aprendizagem em Geometria, particularmente no desenvolvimento de habilidades em trabalhar com as demonstrações.

Metodologia da Pesquisa

A metodologia adotada inspirou-se na Engenharia Didática desenvolvida pela Escola Francesa de Didática da Matemática que, enquanto procedimento metodológico, fundamenta-se em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. A validação das hipóteses é baseada na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (PAIS, 2001). Paralelamente à análise qualitativa efetuada, foi feita uma avaliação a respeito dos níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores participantes antes e após a seqüência com eles trabalhada. Constituiu-se tal análise num estudo quantitativo desse desenvolvimento, com o objetivo de proporcionar maiores subsídios às considerações acerca da validade dos procedimentos propostos.

Os níveis de desenvolvimento foram avaliados através dos testes de Van Hiele e examinados em termos de seu grau de aquisição: completa, alta, intermediária, baixa e não aquisição, observando-se classificação de Gutierrez

⁵ Numa análise das propostas das situações adidáticas, pode ser percebido um relacionamento estreito destas com as propostas de Piaget, no momento em que a ação do aluno é privilegiada numa posição de construção do seu conhecimento.

(1991), *apud* Purificação (1999).

Participantes

O trabalho de campo realizado congregou oito professores de Matemática atuantes em diferentes escolas públicas do município de Angra dos Reis. Todos revelaram ter experiência no ensino da Geometria e utilizar demonstrações neste ensino, com exceção de um dos professores. O tempo de atuação no magistério de cada um oscilou de 2 anos a mais de 20 anos. Quanto à utilização do computador em suas aulas, apenas um declarou já tê-lo feito, de forma eventual. Registra-se que três desses oito professores nunca haviam usado, até aquela ocasião, o computador para qualquer tipo de trabalho.

Instrumentos

Os dados analisados foram coletados durante os encontros entre professores e pesquisador, nas sessões previstas pela investigação, e os instrumentos utilizados foram:

a) testes; b) questionários de sondagem, inicial e final; c) produção dos participantes na forma de material escrito; d) observação do comportamento e das manifestações dos professores nas atividades realizadas e nas discussões de textos, estas gravadas em fita.

a) Testes: Para análise dos níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos participantes, testes⁶ foram aplicados, segundo a teoria de Van Hiele. Os testes de Van Hiele utilizados compreendem cinco grupos de avaliação, avaliando cada um dos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesta investigação não foram utilizados os testes que medem os níveis 1 e 5. A dispensa do teste básico de nível 1, de Reconhecimento ou Visualização, ocorreu em virtude dos participantes serem professores de Matemática e, como tal, considerou-se desnecessária tal avaliação. O teste para o nível 5 foi também dispensado por não haver interesse

⁶ Os testes de Van Hiele aplicados constituem-se em material desenvolvido e elaborado pela equipe do Projeto Fundação do Instituto de Matemática da UFRJ, através de projeto de pesquisa, financiado pelo CNPq, sugerido e orientado pela professora Lílian Nasser.

em se concluir acerca desse nível de pensamento.

Os testes 2, 3 e 4 foram aplicados em duas situações, uma antes e outra após a realização das atividades previstas, com o objetivo de efetuar uma comparação entre os resultados obtidos, verificando uma possível evolução dos níveis de pensamento geométrico dos professores, após a realização das atividades previstas.

Na avaliação dos resultados, tanto do pré como do pós-teste, uma questão para ser considerada correta deveria ser respondida de forma completamente satisfatória.

A consideração do grau de aquisição de um determinado nível baseou-se no índice de acertos das questões apresentadas no respectivo teste. Assim, de 80 a 100% de acerto no teste, corresponderia à aquisição completa do referido nível; de 70 a 80% (exclusive) à aquisição alta do mesmo; de 50 a 70% (exclusive) à aquisição intermediária; de 30 a 50% (exclusive) à aquisição baixa e abaixo de 30% a não aquisição do nível em questão. Somente a aquisição completa ou alta de determinado nível foi considerada suficiente para definir o sujeito dentro de tal estágio de desenvolvimento e sua classificação, no geral, correspondeu ao mais alto nível por ele adquirido.

b) Questionários de Sondagem: Os questionários aplicados foram apresentados e respondidos na forma escrita. O inicial teve o objetivo de traçar um perfil individualizado dos professores. Ao mesmo tempo, buscou colher dados sobre as concepções dos participantes acerca da Geometria e, particularmente, acerca das demonstrações e de seu ensino visando uma comparação posterior com respostas obtidas na aplicação do questionário final que pudesse sugerir uma postura favorável às demonstrações e ao seu ensino, por parte dos mesmos.

O questionário final coletou depoimentos dos professores sobre: o papel das demonstrações no ensino da geometria; as vantagens da utilização de *softwares* de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem dessa disciplina; sua participação no experimento e sobre possíveis influências e/ou contribuições dessa participação em sua vida profissional.

c) Produção dos Participantes: A produção dos professores durante os trabalhos, no ambiente de geometria dinâmica, foi registrada na forma de

material escrito. Tal produção englobou o encaminhamento e o desenvolvimento de seu processo de resolução dos problemas apresentados, fornecendo dados sobre sua forma de raciocinar, sobre suas dificuldades e seus avanços. Esses dados se constituíram em fonte para o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* dos fenômenos de aprendizagem observados.

d) Observação do Comportamento: A observação do comportamento e das manifestações dos professores, durante as sessões, foi registrada através de gravação em fita e utilizada tanto na análise do seu desempenho como na de suas considerações acerca das demonstrações. Para isso, paralelamente aos trabalhos no laboratório, foram desenvolvidas discussões acerca de temas relacionados ao assunto da investigação, buscando-se uma reflexão sobre as demonstrações e o seu ensino de forma a estimular nos professores uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

Procedimentos

O projeto foi desenvolvido em 15 sessões semanais de 90 minutos cada uma, perfazendo um total de 22 horas. Na primeira sessão, foram feitas as apresentações iniciais, estabeleceu-se o contrato didático e foram aplicados o questionário de sondagem e o pré-teste. Na sessão seguinte, o ambiente de geometria dinâmica, o *Tabulae*⁷, foi apresentado aos professores, juntamente com a apresentação de telas com trabalhos já prontos e efetuados nesses ambientes. Nesta segunda sessão, o professor teve espaço para fazer uso, inicialmente dirigido e depois livre, do programa.

Durante as sessões de números três a doze, as atividades⁸ foram efetuadas pelos professores mediadas por discussões, conforme já mencionado. As atividades propostas na seqüência, em número de oito,

⁷ Programa desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, dentro do projeto PACE (Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino), constituindo-se numa alternativa brasileira aos *softwares* de geometria dinâmica encontrados no mercado.

⁸ Segundo Gravina e Santarosa (1999), na utilização de ambientes informatizados, podemos identificar atividades de expressão (o aluno constrói o modelo e, através de recursos do ambiente, reflete, experimenta, ajusta, modifica suas concepções) ou de exploração (é dado ao aluno um modelo pronto para ser explorado, entendido, analisado).

compreenderam as de expressão (cinco) e as de exploração (três), envolvendo conceitos e propriedades relacionados a circunferências, triângulos, retângulos e quadrados. Nas de expressão, os professores construíram figuras, identificaram e demonstraram propriedades destas e, ao mesmo tempo, tiveram a oportunidade de se familiarizar com o programa utilizado, o *Tabulae*. As três atividades de exploração foram realizadas em torno de construções já prontas e que tinham de ser exploradas segundo um objetivo. Os textos que norteavam as discussões⁹, em número de seis, versavam sobre: a) o pensamento lógico-dedutivo; b) as demonstrações matemáticas; c) teorias de aprendizagem; d) o pensamento geométrico; e) demonstrações e seu ensino: resultados de pesquisas; f) ambientes de geometria dinâmica.

As sessões de números treze e quatorze foram reservadas para a complementação dos trabalhos, bem como para a aplicação do pós-teste. No último encontro foi feita uma avaliação global dos trabalhos e foi aplicado o questionário final, quando se encerraram as atividades do estudo de campo.

Apresentação e Discussão dos Resultados

A análise do processo se constituiu de duas partes: uma referente ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores e outra relacionada a competências desenvolvidas e à prática de novas metodologias pelos participantes.

Na observação da possível evolução dos níveis de raciocínio geométrico dos participantes, foram desenvolvidos estudos qualitativos e quantitativos.

⁹ Em linhas gerais, discutiu-se em: a) a lógica como uma ciência, os tipos de argumentos, o pensamento lógico dedutivo; b) a estrutura matemática: conceitos primitivos e derivados, axiomas e teoremas, os componentes de uma demonstração (hipótese e tese); c) o racionalismo, o empirismo, o construtivismo; d) os aspectos intuitivos e lógicos do pensamento geométrico, a teoria de Van Hiele; e) tipos de demonstrações, pesquisas em torno do tema; f) características e potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica.

Estudo Qualitativo

Para melhor compreensão da análise qualitativa realizada, serão aqui apresentados dois exemplos do processo de validação efetuado no confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*. São exemplos relacionados a duas¹⁰ das oito atividades realizadas pelo professor B, uma de expressão e outra de exploração.

A atividade do triângulo retângulo, de expressão e a quinta na ordem de aplicação, foi a selecionada por se situar numa etapa intermediária do processo, quando se poderia esperar melhor desempenho do professor na utilização do *software* e, conseqüentemente, maior liberdade para trabalhar os conceitos geométricos.

A do triângulo equilátero, atividade de exploração, foi selecionada por ter sido uma das mais motivadoras para os professores. Na Tabela 1, abaixo, temos a descrição dos objetivos das mesmas.

Tipo	Tema	Objetivos
De expressão	Triângulo retângulo	Efetuar verificações empíricas e produzir demonstrações a respeito de propriedades solicitadas do triângulo retângulo.
De exploração	Triângulo equilátero	Conjecturar, investigar sobre posição ideal de ponto interior a triângulo equilátero tal que a soma de suas distâncias aos lados do triângulo seja a menor possível. Concluir sobre a constância da soma dessas medidas, independente da localização do ponto no triângulo e efetuar demonstração exigida.

Tabela 1: Atividades selecionadas e respectivos objetivos

Definiu-se, na análise *a priori* da atividade do triângulo retângulo: um triângulo deve ser construído de modo que um dos seus lados coincida com o diâmetro de uma circunferência. A partir de medidas registradas na tela do *Tabulae* e da análise do comportamento das mesmas com a movimentação da figura, verificar o estabelecimento de um triângulo retângulo como conseqüência das condições de construção. Para justificar esse fato, o professor deve fazer uma reinterpretação do desenho, percebendo fatos estáveis implícitos decorrentes dos fatos declarados na construção. Isso

¹⁰ O texto das duas atividades relatadas encontra-se em anexo.

significa perceber que o ângulo oposto ao lado coincidente com o diâmetro é um ângulo inscrito num semicírculo e, portanto de medida igual a 90° . A verificação da medida da mediana relativa à hipotenusa ser equivalente à medida da metade desta, também é feita através da análise do comportamento das medidas provocado pelo dinamismo da figura (Figura 1). A justificativa para essa propriedade é simples e se baseia na própria construção, onde a mediana e as seções médias da hipotenusa são raios do mesmo círculo apresentando, assim, a mesma medida.

A análise *a posteriori* revelou que: através da análise da produção e dos depoimentos do professor B nessa atividade, pode-se observar que a construção do triângulo, apresentando um dos lados coincidindo com o diâmetro da circunferência inicialmente construída, não apresentou grande dificuldade para ele. A caracterização do triângulo retângulo, pelo fato da hipotenusa coincidir com o diâmetro da circunferência, foi um passo que se mostrou favorável ao enriquecimento das representações desse professor, o que pode ser percebido pelos seus comentários a respeito: *“Impressionante como, com o movimento da figura, percebemos claramente que o vértice oposto ao lado que é diâmetro da circunferência sempre corresponderá a um ângulo reto.”* A justificativa dada para esse fato baseou-se, como previsto na análise *a priori*, em conceito de ângulo inscrito num semicírculo. Na etapa final do trabalho, com a construção da mediana relativa à hipotenusa, foram processadas novas investigações a partir da movimentação da figura, como a de verificar a natureza dos triângulos APC e BPC obtidos a partir da mediana construída. Com a observação do movimento e da conseqüente alteração no comportamento das medidas registradas na tela, novos fatos implícitos foram observados, ou constatados: que as medidas da mediana e da semi-hipotenusa coincidiam por serem raios do círculo, que os triângulos APC e BPC eram, conseqüentemente, isósceles. O professor B concluiu, então, sobre a relação entre as medidas dessa mediana e da hipotenusa e sua demonstração foi feita com base na sua condição de raios da circunferência. No desenvolvimento dessa atividade, a apreensão perceptiva e a discursiva estiveram muito presentes (Figura 2).

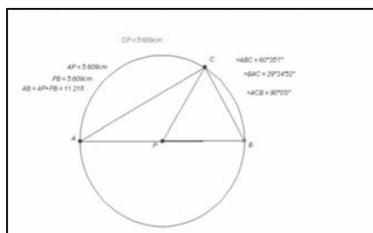


Figura 1: Triângulo retângulo inscrito

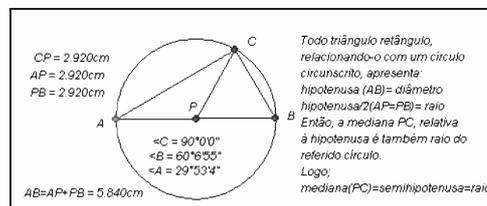


Figura 2: Demonstração no triângulo retângulo

Na atividade do triângulo equilátero, estabeleceu-se na análise *a priori* que a expectativa é de que a primeira hipótese do professor aponte para a localização desse ponto no incentro, baricentro ou circuncentro do triângulo. Isso se explica pela frequência com que a resolução de problemas semelhantes a este seja voltada para um relacionamento com esses pontos. Uma iniciativa que logo deve surgir é a verificação da conjectura pelo controle das medidas das distâncias do ponto P aos lados do triângulo e da soma dessas medidas. Constatada a não validade da conjectura, os professores devem partir para novas investigações. A constatação de que a soma é constante e igual à altura do triângulo é uma etapa seguinte e deve ser acessível à maioria. A solução, no entanto, só será encontrada a partir de extensões da figura, com a formação de triângulos, subconfigurações do triângulo original, onde em cada um deles, o respectivo segmento distância é, ao mesmo tempo, a sua altura. A justificativa surge, então, fundamentada na igualdade entre a área do triângulo dado e a soma das áreas dos três triângulos subconfigurações. Considera-se que nem todos consigam chegar a tal estágio pela demanda de apreensões operatórias mais complexas exigidas na resolução do problema.

Através da análise *a posteriori*, confirmou-se que a primeira conjectura do professor B seria apresentar um dos pontos notáveis do triângulo como solução para o problema. Sua sugestão inicial recaiu no “BICO”¹¹, mas tal conjectura foi invalidada, pois a soma então encontrada se repetia para o ponto em outras diferentes localizações. O professor concentrou-se em investigações, num processo de ações, formulações, validações, ações, em busca de explicações para o novo fato que contrariou suas expectativas.

¹¹ No triângulo equilátero, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro coincidem e a localização comum desses pontos pode ser denominada “BICO”

A seguir, baseado nas medidas obtidas com o dinamismo da figura, através de recurso próprio do ambiente, verificou que a soma das distâncias mostrava-se constante. Nas suas experiências, manipulando a localização do ponto no triângulo, em seu interior e sobre seus lados; foi decisiva sua localização no vértice do triângulo. Essas investigações sugeriram, também, que tal soma era equivalente à altura do triângulo equilátero dado (Figura 3). A partir da compreensão de um possível relacionamento entre a solução do problema e a área do triângulo, num momento de *insight* do investigador¹², surgiu a idéia de obter extensões do desenho (três subconfigurações triângulos), contrariamente às previsões da análise *a priori* quando se colocavam as extensões do desenho sugerindo tal relacionamento. Nessa ocasião, a apreensão operatória da figura foi decisiva na correta resolução do problema.

A justificativa final surgiu fundamentada na igualdade entre a área do triângulo dado e a soma das áreas dos três triângulos subconfigurações. Embora esta equivalência seja explícita na figura, a igualdade que se pretende comprovar, entre a soma constante das alturas desses três triângulos e a altura do triângulo original, é decorrente e é demonstrável através de um processo algébrico e somente acontece por se tratar de um triângulo com lados de mesma medida. Essa é, portanto, uma característica específica do triângulo equilátero.

Assim, da estabilidade das subconfigurações emergiram os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema): a soma das medidas das distâncias é constante e essa soma é equivalente à medida da altura do triângulo equilátero dado (Figura 4). As apreensões operatórias (reinterpretações, reconstruções, extensões), ligadas ao processo de abstração reflexionante, geraram as subconfigurações, suporte à argumentação dedutiva. Foi desenvolvida, então, a demonstração formal escrita, fornecendo a explicação tão esperada por todos para fato aparentemente estranho e avesso aos seus conhecimentos prévios.

¹² Foram palavras do professor B: “Se a soma constante é igual à altura do triângulo, isso tem a ver com sua área”.

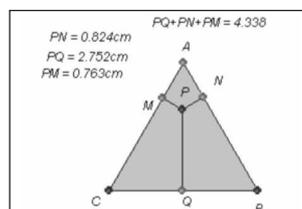


Figura 3: Distâncias do ponto

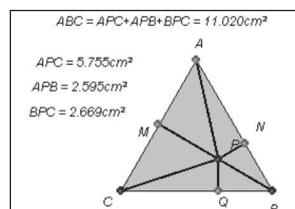


Figura 4: A área dos triângulos

Na aplicação da seqüência didática, a análise das produções e de possíveis progressos dos professores na compreensão e elaboração de demonstrações foi feita através da confrontação entre a análise *a priori* e o que se produziu efetivamente no desenrolar do experimento e que se sistematizou pela análise *a posteriori*. Assim, a avaliação do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes, segundo os instrumentos utilizados, permitiu sugerir que os professores, de um modo geral, consolidaram e/ou avançaram em seus conhecimentos em Geometria, bem como no trabalho com as demonstrações, pois revelaram compreender: a) o tratamento do desenho como uma instância de representação do objeto geométrico, contribuindo muito para isso, as atividades de construção realizadas em que o desenho fica subordinado às apreensões seqüenciais, favorecendo a devida fusão dos componentes figurais e conceituais do objeto geométrico; b) a importância e necessidade das demonstrações para explicar logicamente propriedades das figuras e para resolver problemas; c) a ordenação das informações que compõem a prova, entendendo que imposições de construção (as hipóteses) acarretam fatos estáveis implícitos (a tese) que exigem explicações e que se revelam no dinamismo do desenho; d) o processo das demonstrações, desenvolvendo competências na habilidade em construí-las.

Estudo Quantitativo

Numa outra dimensão, através da aplicação dos testes de Van Hiele e da análise dos seus resultados, foram avaliados e comparados os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores participantes em momentos anteriores e posteriores à aplicação da seqüência didática. Com

essa nova interpretação, puderam ser identificados os níveis de desenvolvimento do pensamento de cada professor, nesses dois momentos, conforme apresentado na Tabela 2, abaixo. E a distribuição dos professores em frequência absoluta, pelos níveis, pode ser sintetizada e observada no gráfico a seguir (Figura 5).

Professor	Pré-Teste	Pós-Teste
A	Nível 3	Nível 3
B	Nível 2	Nível 4
C	Nível 2	Nível 3
D	Nível 2	Nível 2
E	Nível 4	Nível 4
F	Nível 3	Nível 3
G	Nível 3	Nível 4
H	Nível 4	Nível 4

Tabela 2: Pensamento geométrico dos professores

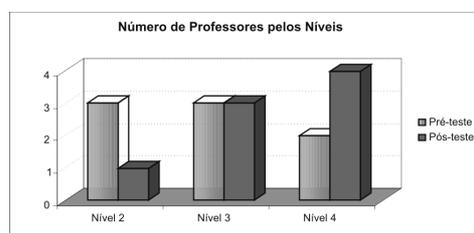


Figura 5: Professores pelos Níveis

Na leitura dos dados, o momento inicial revela uma não homogeneidade nos níveis de pensamento geométrico dos professores. Três deles iniciam no nível 2 que corresponde à fase da análise. É uma alta frequência relativa para o referido nível, em se tratando de professores. A mesma frequência ocorre para o nível 3 que corresponde à fase da dedução informal ou ordenação. Somente dois dos participantes iniciam no nível 4 correspondente à fase da dedução formal que se caracteriza pelo domínio do processo dedutivo e das demonstrações envolvendo a compreensão de seu significado e do papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva, nível este esperado para o professor. Esta constatação confirma as observações iniciais feitas sobre o despreparo do professor para o trabalho com as demonstrações.

Após as atividades da seqüência, o quadro representativo da questão melhora, embora não represente, ainda, uma situação ideal. Particularmente, em relação ao pretendido nível 4, o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores é sensível. Observou-se, pelos resultados do pré-teste, uma

grande dispersão no seu grau de aquisição inicial: dois dos professores sem a aquisição do referido nível (Professores B e D), dois com baixa aquisição (Professores C e F), dois com intermediária (Professores A e G), um com alta aquisição e um com aquisição completa (Professores E e H, respectivamente). Após os trabalhos, dos dois professores que iniciaram sem nenhuma aquisição, um continuou nesse patamar¹³,

Professor D, mas o outro atingiu uma alta aquisição, Professor B, o que representa um significativo avanço. Dos que apresentaram baixa aquisição, um persistiu, Professor F, enquanto o professor C conseguiu atingir a intermediária. Para os dois, em aquisição inicial intermediária, somente um avançou e para a aquisição completa, o Professor G. O professor E, que apresentou aquisição inicial alta a manteve. O único, Professor H, que já apresentava aquisição completa, persistiu na mesma.

Assim, especificamente em relação ao nível 4, temos, a seguir, suas representações tabular e gráfica (Tabela 3 e Figura 6).

Grau de aquisição	Nº Professores (pré)	Nº Professores (pós)
Nenhuma	2	1
Baixa	2	1
Inter	2	2
Alta	1	2
Completa	1	2

Tabela 3: Número de professores por grau de aquisição do nível 4, nos pré e pós-testes

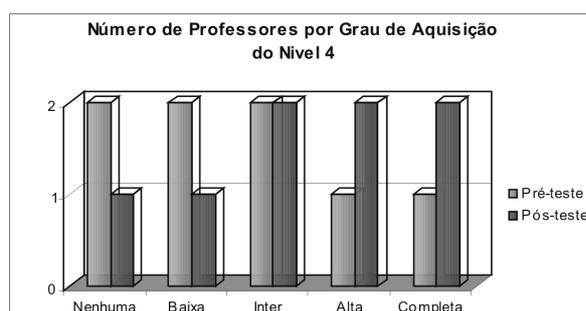


Figura 6. Gráfico de Número de professores por grau de aquisição do nível 4

¹³ As dificuldades do professor D em questão explicam-se, de certa forma, por ser um profissional sem formação universitária.

Terminados os trabalhos verificaram-se avanços. Quatro dos professores participantes apresentaram aquisição alta ou completa do nível 4, o que era uma das metas a ser atingida.

Revelou-se, portanto, positiva a participação dos professores nos trabalhos do Estudo de Campo, o que vem embasar as considerações feitas a respeito, na análise qualitativa.

Confronto entre Depoimento dos Professores

Para verificar uma possível contribuição do trabalho realizado, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, foi efetuada uma análise comparativa dos depoimentos dos professores obtidos através dos questionários de sondagem, antes e depois da seqüência, e uma análise de suas manifestações durante as discussões dos textos.

O primeiro passo para uma mudança pode ser a consciência de uma concepção errada a respeito de algo. É a instalação do *desequilíbrio*, segundo Piaget (1995). Nesse sentido, registram-se as seguintes falas dos professores que podem representar esse primeiro passo para eles: “*estamos conscientes da prática de um ensino tradicional da Matemática, fora da realidade do aluno e com ênfase na memorização*”, “*as demonstrações quando usadas são feitas de uma forma errada porque é o professor que a apresenta pronta para o aluno que não participa de nada e nem quer*”.

O segundo passo pode ser visto como o se colocar pronto às mudanças, buscando a necessária *assimilação* e *acomodação*. Podemos perceber essa idéia na seguinte colocação dos professores: “*estar aberto ao novo*”.

A *adaptação*, garantindo o *reequilíbrio*, pode aqui ser considerada como a percepção de novos caminhos para trabalhar as demonstrações. Os caminhos apontados pelos professores envolvem aspectos didáticos e cognitivos do ensino das demonstrações. São eles: “*uma melhor compreensão das demonstrações pode ser obtida através da construção das figuras e conseqüente conceituação correta do objeto geométrico*”; “*é importante a contribuição do computador no ensino da Geometria e das*

demonstrações”; “é preciso que aconteçam novas práticas onde o aluno experimente, verifique suas conjecturas, faça demonstrações usando lógica”, “a didática muda como consequência do aumento de conhecimentos”.

Assim, mudanças em sua visão sobre o ensino-aprendizagem da Geometria, favoráveis ao uso das demonstrações nesse processo, podem ser sugeridas.

Considerações Finais

O trabalho aqui relatado teve como objetivo investigar a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica na formação de professores de Matemática, no sentido de adequar e intensificar o uso das demonstrações no ensino da Geometria.

Observaram-se avanços nos participantes das sessões programadas. A exigência desses ambientes na utilização das propriedades da figura para sua construção e o dinamismo desta figura possibilitado pela sua manipulação na tela, através do recurso do arrastar, favoreceram a consolidação da representação correta do objeto geométrico com o exercício de suas apreensões perceptiva, discursiva e operatória (DUVAL, 1995). Através do potencial do ambiente, instalado o processo espiral de ações, formulações, validações, ações desencadeado pelas investigações realizadas, tornava-se concreto, para os professores, o controle dos fatos declarados e dos fatos estáveis implícitos relativos ao problema tratado, favorecendo-lhes a compreensão do significado das demonstrações. Com esse controle, era assim conquistada uma das condições para o desenvolvimento do processo das demonstrações.

A utilização do modelo de situação didática proposta pela Escola Francesa, ao permitir que fossem contemplados os papéis reservados a aluno e professor no processo ensino-aprendizagem, possibilitou uma realização didática em que se aplicaram os pressupostos da teoria piagetiana: os alunos (professores participantes) foram os construtores de seu conhecimento, tendo no professor (pesquisador) um provocador e mediador e, assim, atingindo saberes e ascendendo relativos níveis de pensamento geométrico.

Tais constatações puderam ser observadas na validação das hipóteses resultante do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* e foram corroboradas pelo estudo comparativo dos resultados dos pré e pós-teste dos níveis de compreensão do pensamento geométrico, segundo Van Hiele (1959).

Por outro lado, a dinâmica utilizada nos encontros envolvendo discussões e reflexões sobre aspectos relacionados com o ensino-aprendizagem das demonstrações contemplou princípios que devem orientar a formação de professores segundo pesquisadores do assunto (NÓVOA, 1995, VALENTE, 1996, GARCIA, 1998, PERRENOUD, 1999, BORBA; PENTEADO, 2001, PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003). Destaca-se que a prática reflexiva e a participação crítica devem ser as orientações prioritárias na formação de professores e essa prática reflexiva deve repousar sobre uma base de competências profissionais que inclua a utilização de novas tecnologias informáticas na educação.

Após os trabalhos, verificou-se, de um modo geral, um novo olhar para as demonstrações, agora, entendidas como um processo e não simplesmente como um resultado. Processo este que pode e deve ser desenvolvido paralela e gradativamente ao ensino da Geometria, com um formalismo adaptado aos níveis de desenvolvimento do aluno. Os ambientes de geometria dinâmica foram identificados como um rico e eficiente recurso que vem contribuir para a efetivação de uma proposta de ensino que privilegia uma aprendizagem interativa, onde o sujeito é o agente maior de sua aprendizagem.

Assim, tendo em vista os avanços observados nos níveis de pensamento geométrico dos professores participantes e as suas considerações a respeito do ensino das demonstrações, sugere-se que o trabalho no ambiente de Geometria Dinâmica se constitui numa alternativa eficiente no processo de formação de professores no sentido de favorecer o uso das demonstrações, especialmente porque nesse ambiente é possível contemplar tanto os aspectos conceituais quanto os aspectos didáticos da Geometria.

Referências

- ALVES, G.S. **O uso de softwares de geometria dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas:** uma aplicação em alunos do ensino médio. 2004. 270 f. Dissertação (Mestrado em Informática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- BELFORT, E; GUIMARÃES, L. C; BARBASTEFANO, R. Geometria dinâmica e demonstrações na formação continuada de professores. In: CABRI WORLD 99, 1999, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUC-SP, 1999. Volume eletrônico.
- BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)**, Grenoble, France: Editions la Pensée Sauvage, v. 7. n. 2, p. 33-115, 1986.
- DUVAL R, **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Paris: Peter Lang, 1995.
- GARCIA, C. M. **Formação de professores para uma mudança educativa.** Portugal: Porto Editora, 1998. (Coleção Ciências da Educação Século XXI)
- GOUVÊA, F.A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração:** uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental. 1998. 274 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998.
- GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2001.
- GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, PGIE-UFRGS, v. 2, n. 1, p. 73-88, 1999.
- HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an Overview. **Educational Studies in Mathematics:** Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, n. 44, p.5-23, 2000.
- HOYLES, C.; JONES, K. Proof in dynamic geometry contexts. In: MAMMANA, C. E VILLANI, V. (Eds). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.**

London, England: Kluwer Academic Publishers, p.121-128, 1998. (ICMI Study Series)

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure. In: BALACHEFF, N. E VIVET, M. (Eds.). **Didactique et Intelligence Artificielle**. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1994.

LABORDE, C. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. In: **Educational Studies in Mathematics**, 44: p.151-161, 2000.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, SBEM, São Paulo, n. 4, p.3-13, 1995.

NÓVOA, A. A formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (Coord.). **Os Professores e sua Formação**. Tradução de Graça Cunha, Cândida Hespanha, Conceição Afonso e José A. S. Tavares. Portugal: Porto Editora, p. 13-33, 1995.

PAIS, L.C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, UNICAMP: Campinas, São Paulo, ano1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PERRENOUD, P. Formar professores em contextos sociais em mudança: prática reflexiva e participação crítica. **Revista Brasileira de Educação**. n.12, p.5-21, set/out/dez, 1999.

PIAGET, J. **Desenvolvimento da inteligência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante** - relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artmed, 1995.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Ed.), **Formação de professores de matemática**: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p.159-192.

PURIFICAÇÃO, I.C. **Cabri-géomètre e a teoria de Van Hiele**: possibilidades e avanços na construção do conceito de quadrilátero. 1999. 228 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1999.

RICHIT, A. Projetos de geometria analítica e software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EBRAPEM, n. 9, p. 1-15. São Paulo. **Anais do IX EBRAPEM**, São Paulo: FE/USP, 2005.

VALENTE, J. A. **O professor no ambiente logo: formação e atuação**. Campinas: Gráfica da UNICAMP/NIED, 1996.

VAN HIELE, P., **Structure and insight**. Orlando: Academic Press, 1959.

VIANNA, C. S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática**. 1988. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

ZULATTO, R. B. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

Aprovado em fevereiro de 2009

Submetido em outubro de 2008