****Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales****

**Specialized Knowledge of One Primary Mathematics Teacher Teaching Rational Numbers**

**Autores**[[1]](#footnote-1)\*

****Resumen****

Describimos el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas experto de Educación Primaria, que enseña el tema de los números racionales a estudiantes de 11 a 12 años de edad. Realizamos un análisis de contenido de las transcripciones de las 21 sesiones de clase impartidas, empleando un sistema de categorías de los subdominios de conocimiento del modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK). Ello nos permitió apreciar los conocimientos manifestados por el profesor en su práctica, especialmente en tres subdominios, el conocimiento de los temas matemáticos, de las características del aprendizaje de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas.

**Palabras-clave**: Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Profesor Experto. Números Racionales. Estudio de Caso.

**Abstract**

We describe the specialized knowledge an expert Primary Education math teacher while teaching the topic of rational numbers to students 11-12 years old. Using a category system of the subdomains of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model (MTSK), a content analysis of the transcripts of 21 classes taught was performed. This allowed us to appreciate the knowledge expressed by the teacher in his practice, especially in three subdomains: mathematical content knowledge, characteristics of the learning of mathematics, and knowledge of mathematics teaching.

**Keywords**: Mathematical Knowledge for Teaching. Mathematics Teacher Specialized Knowledge. Expert Teacher. Rational Numbers. Case Study.

**Introducción**

Actualmente uno de los problemas principales en la línea de Formación de Profesores de Matemática es estudiar el conocimiento profesional del profesorado (ENGLISH, 2008), donde se analiza su naturaleza, las características que lo conforman, el grado de conocimiento matemático que tienen y han de tener los profesores para desarrollar su tarea docente. Aspectos reflejados en las distintas reuniones internacionales de Educación Matemática celebradas cada año y en las nuevas revistas de profesores que han ido surgiendo en el último tiempo.

Es evidente que existen inquietudes acerca del conocimiento y las habilidades del profesor, y en cómo estas cuestiones repercuten en la tarea de enseñanza, correspondiendo a algunos de los fenómenos que se estudian en Educación Matemática (SCHOENFELD, 2010, p. 504). El informe *Teachers for Tomorrow’s Schools* (2001) que analiza los indicadores educativos desarrollados por la OCDE/UNESCO (World Education Indicators– WEI), sostiene que obtener información a un nivel micro es indispensable, ya que se requieren evidencias que provengan directamente del aula, como una vía para comprender los problemas reales de la educación (OCDE, 2001, p. 14). De este modo, contar con nuevas experiencias, identificadas a partir de la práctica de los propios profesores, puede llevar a comprender las distintas situaciones a las que se enfrentan en su labor docente (RIBEIRO, 2009, p.20).

De lo expuesto se desprende el interés por estudiar y comprender el conocimiento del profesor, especialmente el conocimiento que manifiestan los docentes en ejercicio al enseñar un tema matemático. En este trabajo nos centramos en describir el conocimiento de un profesor de matemáticas en ejercicio en el sistema educativo español, que enseña a estudiantes de Educación Primaria (entre 11 a 12 años de edad) el tema de los números racionales. El profesor se ha seleccionado empleando criterios que nos llevan a considerarlo un docente experto, quien puede aportar más información sobre qué conocimiento ha desarrollado a lo largo de su práctica profesional.

Exponemos una descripción detallada del conocimiento manifestado por el profesor en 21 sesiones de clases, dedicadas a la enseñanza de los números racionales. La descripción del conocimiento manifestado por el docente nos aproxima a la comprensión del conocimiento especializado del profesor en un entorno real.

A continuaciones detallamos los aspectos conceptuales en el cual se enmarca la investigación, la metodología que nos guía a una descripción del conocimiento del profesor y los resultados a los que hemos llegado.

1. **El conocimiento especializado del profesor de matemáticas**

Una importante contribución al estudio del conocimiento profesional de los profesores aparece en los trabajos de Shulman (1986; 1987), donde se busca resaltar la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza y diferenciarlo del conocimiento del contenido que tienen otros profesionales. Estos fundamentos han inspirado al grupo de investigación de la Universidad de Michigan liderado por Deborah Ball, quienes se centran en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y en el desarrollo de medidas que hacen posible el análisis de relaciones entre el conocimiento matemático para la enseñanza, la calidad de su enseñanza y el rendimiento de los estudiantes (HILL; BLUNK; CHARALAMBOUS; LEWIS et al., 2008). Ellos establecen una base práctica basada en lo que se denomina conocimiento matemático para la enseñanza, en inglés Mathematical Knowledge for Teaching (MKT[[2]](#footnote-2)), que se conceptualiza como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p.374).

Los estudios de este equipo de investigación han logrado caracterizar en detalle el conocimiento matemático para la enseñanza, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman. Plantean un modelo de conocimiento en el que distinguen dos grandes dominios: el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento didáctico del contenido*.

El *conocimiento del contenido matemático* está compuesto por tres subdominios. El *conocimiento común del contenido*, que alude al “conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.399), incluyendo, entre otros, el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente. El *conocimiento especializado del contenido*,definido como el “conocimiento matemático y habilidad exclusiva para la enseñanza” (BALL et al., 2008, pp.400**-**401). El *conocimiento del horizonte matemático* es “el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los temas matemáticos incluidos en el currículo” (BALL et al., 2008, p.403). Puede considerarse como el conocimiento sobre las relaciones entre los distintos temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los distintos niveles escolares.

El *conocimiento didáctico del contenido* queda compuesto por tres subdominios. El *conocimiento del contenido y de los estudiantes*, que implica el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular” (HILL et al., 2008, p.375); es decir, es el conocimiento que se utiliza en tareas de enseñanza que conlleva atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos. El *conocimiento del contenido y la enseñanza* queda definido como “el conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático” (BALL et al., 2008, p.401); es decir, abarca saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas. Finalmente, el *conocimiento del currículo* alude al conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (BALL et al., 2008).

Los trabajos desarrollados por Ball y colaboradores tienen gran repercusión en Educación Matemática por la extensión de sus estudios y la cualidad analítica de sus propuestas sobre el conocimiento del profesor (BALL, 2000; BALL et al., 2008; HILL et al., 2008). Se trata de un modelo que surge de la observación de la práctica docente y de cuestionarios aplicados a los profesores, y puede emplearse como punto de referencia para la formación del profesor. No obstante, tal como los propios autores han reflejado en sus investigaciones, se requiere una mayor precisión en la naturaleza de cada dominio de conocimiento del profesor necesario para su práctica.

El grupo SIDM de la Universidad de Huelva, España, liderado por José Carrillo, ha precisado algunos aspectos del modelo MKT, considerando el carácter especializado del modelo completo, no exclusivamente de uno de sus subdominios, lo que lleva a redefinir el modelo MKT dando origen al modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics teacher’s specialized knowledge – MTSK[[3]](#footnote-3)). El modelo MTSK se centra en la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas respecto de la enseñanza del contenido, además considera las creencias de los profesores relacionadas con las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo no serán objeto de estudio la reflexión.

Parte, al igual que el modelo MKT, de dos grandes dominios de conocimiento: (a) *conocimiento del contenido matemático* (MK) y (b) *conocimiento didáctico del contenido* (PCK), como se ilustra en la figura 1.

|  |
| --- |
| KMLS  KMT  KSM  KoT  KPM  KFLM  P  C  K  Beliefs  en  mat  en la  enseñanza  y  aprendizaje  de las mat  M  K |
| **Figura 1**- Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) |

El conocimiento del contenido matemático (MK)es considerado un elemento articulador del MTSK; asimismo el conocimiento didáctico del contenido (PCK) se centra en las diferentes formas de profundizar en el contenido matemático cuando se tiene la intención de enseñanza y aprendizaje.

(a) El *conocimiento del contenido matemático* está compuesto por tres subdominios de conocimiento.

El *conocimiento de los temas* (knowledge of topics – KoT) incluye el conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos. Este subdominio se concreta en saber matemáticas; conocer los aspectos fenomenológicos asociados al tema; conocer los distintos significados del tema; conocer ejemplos específicos a un aspecto concreto de un tema matemático.

El *conocimiento de la estructura de las matemáticas* (knowledge of the structure of mathematics – KSM) es el subdominio que tiene una visión de conjunto de la matemática. Considera la idea de conexión y complejidad del contenido matemático. Las conexiones abarcan las interconceptuales y temporales[[4]](#footnote-4) (MARTÍNEZ; GINÉ; FERNÁNDEZ; FIGUEIRAS; DEULEFEU, 2011). Las conexiones interconceptuales comprenden vínculos entre ideas o conceptos matemáticos distintos, siendo los conectores las ideas matemáticas que vinculan representaciones de un concepto con el de otros. Las conexiones temporales enlazan los conocimientos previos y posteriores con el contenido de enseñanza, permitiendo, por ejemplo, estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento en situaciones nuevas o más complejas, como se define en el conocimiento del horizonte del modelo MKT.

La complejidad es matemática y lleva al docente a un proceso de análisis matemático de los contenidos, con el objeto de establecer aquellos que se conectan o son parte de la matemática, lo que implica una comprensión global de la estructura de la matemática vinculada a los conceptos (AUTOR, año).

El *conocimiento de la práctica matemática* (knowledge of the practice of mathematics – KPM) implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico sobre la lógica en matemáticas), el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática (AUTOR, año).

Además, el modelo considera los aspectos de enseñanza y de aprendizaje de un contenido matemático, así como las consideraciones curriculares y el conocimiento didáctico derivado de la literatura de investigación, que configuran el dominio del *conocimiento didáctico del contenido matemático* (PCK).

(b) El PCK está compuesto por tres subdominios de conocimiento:

El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (knowledge of mathematics teaching – KMT) es el conocimiento que permite al profesor elegir una determinada representación o un material para la enseñanza de un concepto o procedimiento, seleccionar ejemplos o tareas matemáticas para el proceso de instrucción; o bien, elegir recursos didácticos que lleven a adquirir, reforzar o ejercitar los contenidos. También, incluye el conocimiento de teorías de enseñanza, como por ejemplo enseñar a través de la resolución de problemas.

El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (knowledge of features of mathematics learning – KFLM) es aquel conocimiento que permite al profesor conocer el modo de pensar de los estudiantes sobre las tareas matemáticas y comprende todo lo relacionado con generar aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, conocer las dificultades más frecuentes en el aprendizaje de un contenido o procedimiento matemático, así como saber detectarlas en las respuestas de los alumnos.

El *conocimiento de los estándares de aprendizaje* (knowledge of mathematics learning standards – KMLS) alude a conocer los contenidos propuestos en las normativas curriculares de los niveles de enseñanza (los contenidos, objetivos, orientaciones de enseñanza, los materiales o recursos en los niveles educativos). Puede extenderse a orientaciones que van más allá de las estipuladas en los documentos oficiales; es decir, aquellas recomendaciones de expertos en la materia o asociaciones profesionales o de investigadores (NCTM, PISA, OCDE, UNESCO), investigaciones en el área, entre otros.

Los seis subdominios que dan origen al modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas sitúan la matemática como elemento común, centrando la atención en las diferentes formas de profundizar en el contenido matemático cuando es objeto de enseñanza y aprendizaje.

El modelo de MTSK se muestra como una herramienta de investigación que permite identificar con precisión los dominios de conocimiento. El grupo de investigación está identificando indicadores precisos de conocimiento para cada subdominio. Ello nos ha permitido establecer un sistema de categorías con el que analizar las clases impartidas por el profesor, como presentamos en el siguiente apartado

1. **Categorías de los subdominios del conocimiento del profesor**

Para elaborar el sistema de categorías para analizar el conocimiento del profesor nos hemos valido de la realización de un análisis didáctico de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales. El grupo de investigación “FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, ha definido el análisis didáctico como “el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.” (GÓMEZ, 2007, pp.18-19). Esta idea del análisis didáctico se fundamenta en la teoría curricular que se articula a partir de cuatro dimensiones, cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social, en distintos niveles de especificación (RICO, 1997a), siendo un recurso que permite al profesor organizar la actividad de enseñanza en relación con un tema matemático específico. Así, este análisis tiene por objetivo facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, considerando el máximo de dimensiones que influyen en su actuación, mediante cuatro tipos de análisis parciales: a) de contenido, b) cognitivo, c) de instrucción y d) de actuación (GÓMEZ, 2007, p.29).

Para profundizar en el conocimiento de la enseñanza de los números racionales hemos realizado el análisis didáctico de los números racionales para tener un referente con el cual comprender mejor los diversos elementos que intervienen en la enseñanza de este contenido (autor, año).

Luego de realizar el análisis didáctico del contenido matemático, en nuestro caso de los números racionales, examinamos los componentes que intervienen según la descripción de los subdominios de conocimiento del modelo MTSK. Lo que lleva a establecer categorías respecto de cada subdominio de conocimiento, como enunciamos en la tabla 1.

| **Tabla 1**- Categorías relacionadas con el análisis didáctico | |
| --- | --- |
| **KoT** | * Conceptos * Fenomenología * Procedimientos matemáticos * Sistemas de representación * Aspectos de comunicación matemática * Tareas matemáticas[[5]](#footnote-5) |
| **KSM** | * Relaciones entre componentes de la estructura conceptual * Procesos de simplificación y de complejización de los contenidos |
| **KPM** | * Modos de proceder en matemáticas (prácticas de la demostración, de la definición, del ejemplo, del contraejemplo, entre otras) * Procesos de argumentación y uso del lenguaje matemático |
| **KFLM** | * Características de aprendizaje * Errores y dificultades * Tareas matemáticas * Materiales y recursos |
| **KMT** | * Estrategias * Tareas matemáticas * Sistemas de representación * Formas de uso de los materiales y recursos |
| **KMLS** | * Lenguaje matemático * Proceso de instrucción * Orientaciones curriculares |

Para cada categoría establecemos indicadores de conocimientos que nos permiten identificar qué conocimiento se observa a partir de la actuación del profesor en el aula. Hemos definido 57 indicadores respecto de los seis subdominios del modelo de conocimiento MTSK y según las categorías que surgen del análisis didáctico. En la tabla 2 detallamos algunos indicadores de conocimiento para el subdominio KoT en relación con nuestro tema de estudio.

| **Tabla 2**- Indicadores de conocimiento respecto de dos categorías | |
| --- | --- |
| **Conceptos** | |
|  | Conocimiento de la estructura conceptual de los números racionales. (Entre otros: la idea de cuerpo conmutativo respecto de la suma y multiplicación, números con representación decimal finita o periódica, construcción formal como conjunto cociente de los enteros, denso en, etc.). |
|  | Conocimiento de los distintos temas, conceptos y procedimientos matemáticos vinculados a los números racionales. (Entre otros, la proporcionalidad, la probabilidad, razones trigonométricas, semejanza de figuras). |
|  | Precisión en las definiciones y propiedades y riqueza de relaciones entre los conceptos matemáticos. (Entre otros: que en se pueden resolver todas las ecuaciones del tipo , y , que puede definirse un orden total, etc.). |
| **Fenomenología** | |
|  | Conocimiento de distintos significados del concepto de fracción (relación parte-todo, reparto, medida, cociente, operador y razón). |
|  | Conocimiento de campos de utilidad del contenido en ámbitos específicos relacionados con el pensamiento multiplicativo inverso y la proporcionalidad, especialmente si se refiere a contenidos con mayor grado de formalización (por ejemplo, alude a las concepciones de los números racionales como razón, desarrolla el pensamiento proporcional, etc.). |
|  | Conocimiento de contextos que aparecen en diversas situaciones en las que se aplican los racionales (por ejemplo, medidas de magnitudes -medio kilo, tres cuartos de hora- o relaciones concretas entre cantidades -escala de 1:1000, cartografía; tanto por ciento, comercio, por mil; falta el 10%, descuento de un 10%, construcción-, entre otros). |

Los indicadores de conocimiento tuvieron una primera redacción que fue sometida a revisiones de expertos en el área de Didáctica de la Matemática, posteriormente se consideraron las revisiones y observaciones para elaborar la lista final de indicadores.

1. **Metodología**

El objetivo que guía este estudio es describir el conocimiento manifestado por un profesor de Educación Primaria al enseñar el tema de los números racionales. La investigación pretende comprender el conocimiento del profesor, sin intención de generalizar, por lo cual hemos elegido el estudio de caso como diseño de investigación (STAKE, 2007).

Empleamos métodos cualitativos vinculados al paradigma interpretativo. Mediante la observación no participante indagamos detallada y sistemáticamente las características de un proceso de enseñanza, de modo de alcanzar el objetivo planteado (COHEN; MANION; MORRISON, 2011). A continuación, describimos la selección del caso y el proceso de recogida y análisis de datos.

* 1. **Selección del caso**

Para seleccionar al profesor informante de la investigación hemos determinado criterios de selección e identificación de profesores expertos. De la revisión de la literatura extraemos diferentes cualidades para seleccionar a docentes expertos, aspectos que fueron organizados en características primarias y secundarias (AUTOR, año) Las características primarias aluden a cuestiones específicas de la tarea de enseñanza y relacionadas con el conocimiento, como comprender los contenidos específicos y la forma en que aprenden los estudiantes y conocer diversas estrategias de enseñanza, entre otras. Las características secundarias aluden a aspectos objetivos, como ser docente en ejercicio con cinco o más años de experiencia, haber destacado en las evaluaciones institucionales y nacionales, haber enseñado con anterioridad el contenido matemático escolar.

El profesor informante tiene una formación de maestro de Educación Primaria, especialista en matemáticas (tres años de formación como maestro generalista, pero con atención especial a las matemáticas). Ha ejercido la docencia de matemáticas durante 34 años, en la Educación Primaria, participa activamente en sociedades y congresos profesionales de Educación Matemática y constantemente está realizando o guiando cursos de perfeccionamientos en el área de matemáticas. Ha sido recomendado por sus pares al reconocer que domina la materia que enseña. A partir de una entrevista inicial al profesor identificamos que cumple con la totalidad de las características secundarias, por lo que consideramos de interés profundizar en su conocimiento al enseñar el tema de los números racionales.

* 1. **Recogida de datos**

La información sobre la enseñanza puesta en marcha por el profesor y las características de cada la clase ejecutada, se obtiene mediante la observación no participante. Las 21 sesiones, donde se aborda el tema de los números racionales, son grabadas en audio y vídeo. La grabación y el examen de las imágenes se transcriben textuales, complementándose con las notas de campo.

* 1. **Análisis de datos**

El análisis se aplica al texto que registra la actividad matemática desarrollada en las clases. La información de audio y vídeo se transcribe por turnos de intervención, como ilustra la figura 2, a través del criterio conversacional que consiste en separar las declaraciones o turnos de palabras u oraciones de los sujetos implicados; es decir, cuando interviene el profesor y los estudiantes (RODRÍGUEZ; GIL; GARCÍA, 1996, p. 207).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Profesor | : | *Bueno, habíamos visto que la fracción era la parte de un todo. Vamos a dibujar un ratito* |
| Estudiantes | : | *Bien* |
| Estudiante | : | *¡Los dibujos del profe no me gustan!* |
| **Figura 2**- Transcripción por turnos de intervención | | |

Luego dividimos los datos en episodios que corresponden a un fragmento de intervenciones que tienen una secuencia de acciones y un principio y un fin reconocible (KRIPPENDORFF, 1990, p.85). Los episodios tienen un sentido completo, mostrando por ejemplo la ejecución de una tarea o la explicación de un concepto. Posteriormente, en cada episodio vamos identificando fragmentos de información (no necesariamente el episodio complejo) que se relacionan con los indicadores de conocimientos establecidos. En una matriz descriptiva, como se ejemplifica en la figura 3, indicamos cada fragmento (intervalo según un número asignado para cada intervención) que se corresponde con los indicadores de conocimientos establecidos.

|  |  |  |  | **Clase 1** | | | **Clase 2** | | | **…** | **Clase 21** | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Episodios | | | | 1 | … | n |  |  |  |  | 1 | … | n |
| Subdominios de conocimiento | KoT | Indicadores de conocimiento | A1.  **…**  F1. |  | | |  | | |  |  | | |
| KSM |  | | | [fragmento] | | |  |  | | |
| KPM |  | | |  | | |  | [fragmento] | | |
| KFLM |  | | |  | | |  |  | | |
| KMT |  | | | [fragmento] | | |  |  | | |
| KMLS |  | | |  | | |  |  | | |
| **Figura 3**- Matriz de registro de las unidades de información | | | | | | | | | | | | | |

El análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa (FOX, 1981). Esto nos permite identificar los indicadores de conocimiento que surgen a lo largo de las 21 clases y describir el conocimiento manifestado por el docente según los indicadores manifestados.

1. **Conocimiento especializado del profesor al enseñar las fracciones**

Hemos de destacar que en la enseñanza impartida por el profesor prevalece la formulación de preguntas a los estudiantes y la argumentación de ellos para generar la discusión. También insta a los alumnos a compartir sus respuestas o ideas matemáticas, observándose que fomenta una comunicación instructiva, es decir la información promovida se produce por medio de la integración de las contribuciones de los estudiantes (AUTOR, Año). Además, es un gestor de las actividades, más que informador de los contenidos. Utiliza explícitamente preguntas que llevan a los estudiantes a desarrollar o reforzar ideas matemáticas, aclarar o mejorar aquellas interrogantes que surgen a lo largo del proceso, dejando espacio para que los alumnos reflexionen sobre aspectos del contenido, focalizándose en las ideas o señalamientos de sus estudiantes. Aunque estos aspectos se relacionan con el conocimiento pedagógico general, nos llevan a una primera aproximación de la dinámica de enseñanza generada por el profesor.

Detallamos el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, respecto de tres subdominios de conocimiento del modelo MTSK, aquellos que a lo largo de las clases han aparecido con más significatividad: conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KMLS) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT); y según los indicadores de conocimiento que los componen.

**Conocimiento de los temas matemáticos (KoT)**

El indicador *conocimiento de la estructura conceptual de los números racionales* lleva aestablecer que el profesor trabaja el concepto de número racional aludiendo a ellos como números fraccionarios. La fracción se reconoce como un cociente entre dos números , donde su valor resulta de realizar la división .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Profesor | : | *Y hemos dicho qué, ¿la fracción es qué?* |
| Estudiante | : | *Una división* |
| Profesor | : | *Una división, ¿sí o no?* |
| Estudiante | : | *Sí* |
| Profesor | : | *Una división, por ejemplo siete quintos, ¿es qué división?* |
| Estudiante | : | *Siete entre cinco* |
| Profesor | : | *Siete entre cinco. Vale.* |

La caracterización de los números racionales se establece por la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros, planteando ejemplos de cantidades enteras  y luego de cantidades no enteras , así la fracción se define aludiendo a su expresión decimal procedente de la división entre enteros. Como vemos, esto no es obstáculo para emplear como números fraccionarios también aquellos que tienen representante fracciones en las que el numerador es múltiplo del denominador, es decir, las que se corresponden con los enteros. Asimismo, sin nombrar al conjunto , el profesor trabaja la equivalencia, el orden, las operaciones en  (suma, resta multiplicación y división) y sus propiedades (fracción mayor, menor o igual a la unidad; equivalencias notables de  ).

El significado empleado para introducir el concepto de fracción es el de cociente, aunque como apoyo didáctico prevalecen a lo largo de la enseñanza los *significados de fracción* como parte- todo y operador; empleándose definiciones menos formales como “la fracción es una división, un cociente”, “la fracción es parte de algo”, “la fracción es un operador”.

La fracción como parte- todo y operador se trabaja a partir de resolver distintas tareas. Por ejemplo, para el caso de la fracción como parte-todo las tareas comprenden dividir figuras en partes de igual tamaño y de distinta forma, donde se debe identificar cada parte con su representación simbólica. La fracción como operador se trabaja a partir de resolver la tarea de “identificar los tres cuartos de sesenta fichas” (material concreto); así, los se representan en una figura donde el todo (un cuadrado) lo dividen en cuatro partes iguales y donde cada parte tiene asociada una cantidad .

A lo largo de las 21 clases apreciamos que el profesor *domina los conceptos y procedimientos relacionados con las fracciones*, aquellos que enseña, disponiendo de diversos procedimientos para actuar. Por ejemplo, al estudiar la fracción como operador se enuncian distintas tareas que llevan a adquirir los procedimientos para calcular las cantidades: , , . Por lo tanto, identificamos precisión al trabajar la fracción como un operador, especialmente en las operaciones aritméticas que surgen de multiplicar una fracción por una cantidad. También maneja el concepto de número mixto, enfatizando que es aquel que tiene una parte entera y una parte fraccionaria y relacionándolo con la fracción impropia. Muestra dos procedimientos para pasar de fracción impropia a número mixto: por medio de un dibujo (representación como parte- todo) y como división (la parte entera representa al cociente, el numerador de la fracción al resto y el denominador al divisor; así, multiplicando el divisor por el cociente y sumando el resto obtienen el dividendo, formando la fracción impropia con el dividendo y el divisor).

El profesor presenta varios métodos para establecer cuándo dos fracciones son equivalentes: a) dibujar y comparar si cada parte representa la misma cantidad (la misma área), b) representar las fracciones en una recta numérica y ver si coinciden sobre la recta, c) calcular el número decimal correspondiente y compararlos, y d) amplificar o simplificar.

El profesor domina el procedimiento para sumar o restar fracciones con igual denominador, dando sentido a estas operaciones a partir de su representación figural, como se ilustra a continuación:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Profesor | : | *1.png* |
| Profesor | : | *Un tercio. Vale coloréalo. Vale bien. Bueno.* |
| Estudiante | : | *2.png* |
| Profesor | : | *Sara, aquí nos dice. Un tercio más dos tercios. Un tercio más dos tercios. Tres tercios. Vale. Correcto.* |

La representación figural (como parte- todo) permite resolver situaciones de adición o sustracción, donde se tiene una cantidad inicial , luego mediante la acción de juntar o quitar otra cantidad se obtiene la cantidad final . Posteriormente, suman fracciones con distintos denominadores mediante tres métodos: buscando fracciones equivalentes; reducción de fracciones a común denominador por el procedimiento de los productos cruzados; y, calculando el mínimo común múltiplo. Observamos la ordenación lógica que establece de los procedimientos simbólicos de las operaciones aditivas (suma y resta). Igualmente enfatiza procedimientos numéricos en la multiplicación y división de fracciones, como se refleja en el siguiente fragmento:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Profesor | : | *Bueno, para multiplicar fracciones lo que se hace es lo siguiente. Para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores.* |
| Estudiantes | : | *¡Oh!* |
| Estudiante | : | *¡Qué difícil!* |
| Profesor | : | *Y para sacar el denominador* |
| Estudiante | : | *Se multiplican los denominadores* |
| Profesor | : | *Se multiplican todos los denominadores* |
|  |  | *3.png* |

Para multiplicar fracciones “lo que se hace es lo siguiente: para sacar el numerador, se multiplican todos los numeradores, y para sacar el denominador, se multiplican todos los denominadores”. Para dividir dos fracciones el profesor enuncia que para calcular el numerador de la fracción “multiplico el numerador de la primera por el denominador de la segunda” y para calcular eldenominador, cociente del resultado, “multiplico el denominador de la primera por el numerador de la segunda”. También emplea la definición formal de esta operación, indicando que dividir dos fracciones es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción. Por tanto, el conocimiento que muestra sobre las operaciones se centra en procedimientos de cálculo.

Sobre los *sistemas de representación*, al trabajar la fracción como parte-todo y operador se emplea mayoritariamente los sistemas simbólicos (división indicada y decimal), verbal, figural y gráfica. La representación verbal se utiliza para leer las fracciones según su forma simbólica o al enunciar fracciones para escribirlas en su forma simbólica.

Al sumar o restar fracciones con igual denominador el profesor emplea la representación figural para dar significado a la acción de sumar y restar, juntando o quitando las partes de una unidad, con lo que muestra los dos pasos de las operaciones, obtención de la porción resultado y asignación de la representación simbólica fraccionaria.

Destacan los modelos basados en representación figural, tanto los discretos como los continuos. Los modelos continuos abarcan diversas magnitudes, prevaleciendo el modelo de área, que adopta una gran riqueza de polígonos, así como formas redondeadas. Conoce y emplea los modelos lineales, tanto en su versión de relación entre segmentos, como la recta numérica, a la que otorga presencia con diversas funciones. La recta numérica le permite representar la fracción como un punto, lo que aprovecha para trabajar el orden y la equivalencia, vinculando con la idea abstracta de número racional. También emplea modelos de volumen, a partir preferentemente de prismas rectos rectangulares.

Respecto de la representación material o manipulativa, trabajan con papel (para representar partes congruentes) y con fichas de colores que les permiten el trabajo de la fracción como operador.

Las representaciones y los modelos trabajados en clase permiten al profesor ejemplificar o dar significado a las representaciones verbal y simbólica, asimismo reforzar los significados de la fracción como parte-todo y como operador, resolver situaciones de fraccionamiento y realizar operaciones aditivas.

Destaca la presencia de la conversión en el sistema de representación figural, sobre todo para sumar fracciones donde los denominadores son iguales cu.pnge ilustrar fracciones equivalentesex.png. Asimismo, se pone en juego la conversión entre el sistema de representación simbólico, verbal y figural/gráfico en sus modalidades en unidades de longitud y superficie, y en la recta numérica.

**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)**

Centrándonos en el indicador referente a las *dificultades en el aprendizaje del contenido y en cómo el profesor las detecta*, observamos que en las tareas de fraccionamiento (donde emplean la fracción como operador) detecta la dificultad de identificar la unidad a la que se refiere la fracción, a través de los errores que cometen los alumnos en sus respuestas. Igualmente, cuando se tienen una fracción operador y una cantidad , los estudiantes ignoran el orden de las operaciones , lo que lleva al profesor a explicitar que “aquí habéis cometido uno de los errores que suelen cometer los alumnos, cuando se está calculando la fracción de una cantidad”. De este modo guía a los estudiantes para que representen a través de una figura la situación. También, el profesor identifica los distintos errores que los estudiantes presentan al sumar y restar fracciones con numeradores y denominadores distintos.

|  |  |
| --- | --- |
| **fo1.png** | *Manuel dice, hay que sumar fracciones que son distintas,* […] *ha hecho siete más tres diez. Luego él se ha acordado que multiplica todos los de abajo menos por el suyo y ha dicho, cuatro por diez cuarenta, dos por diez veinte y pongo el mismo denominador, y ha empezado a sumarlos.* |
| 1.png  2.png | *Elena se lo ha estudiado de verdad y ha cogido y ha hecho lo siguiente.* […] *Cinco por dos diez, y había puesto ahí el diez, se ve ¿no?*  *Porque ella sabía que para los denominadores tenía que multiplicar los denominadores. Cinco por tres quince y puso el quince.* |

Por lo cual, apreciamos que el profesor conoce distintos errores, por sus expresiones explícitas de que es un error común, como por la estrategia que propone para afrontarlos.

Otro indicar que se presenta con frecuencia a lo largo de las clases es *saber identificar la imagen de un concepto o inferirla en base a las respuestas de los estudiantes*. Específicamente, el profesor conoce las formas en que los alumnos pueden interpretar los conceptos estudiados, además percibe cuándo explican un ejercicio o un problema de forma incorrecta; demostrando disposición para trabajar a partir del error, de modo que los estudiantes den significado a las situaciones. Por ejemplo, cuando los alumnos dan una respuesta incorrecta a la tarea “ de una clase son 15 alumnos”, el profesor los orienta a que representen las cantidades mediante una representación figural, con la que puedan contrastar la validez de su respuesta.

**Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)**

En la enseñanza del tema se *presenta un repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos sobre las fracciones*. Por ejemplo, para enfatizar la idea de división igualitaria, el profesor presenta tareas de dividir diversas figuras en partes de igual tamaño, mediante pasos que atienden a dos aspectos, el tamaño –en relación con alguna magnitud, preferentemente la superficie –, y la forma. Primero, presenta una actividad donde divide una hoja en dos partes de igual tamaño y forma, luego una parte la divide en dos partes de igual tamaño y forma, y la otra en trozos de distinto tamaño y forma. La actividad conlleva que cada parte de igual tamaño y forma representa una “fracción”, mientras las partes de distinto tamaño y forma indican solo una “división” (en palabras del profesor). Continúan el trabajo dividiendo diversas figuras en partes de igual tamaño y forma, y luego de igual tamaño y distinta forma, con lo que refuerza las nociones de “fraccionar” y “dividir”. Empleando la idea de fraccionar para la división igualitaria (representa la misma cantidad), mientras la noción de dividir para la acción de partir o separar en partes no necesariamente iguales. De este modo emplean la expresión “fraccionar” como sinónimo de “dividir una figura en partes iguales o congruentes”.

Las figuras que dividen no son todas sencillas de fraccionar (t.png, dividir en cuatro partes de igual forma y tamaño) y van aumentando la complejidad en el establecimiento de partes de igual forma y área.

También el profesor presenta tareas en contextos concretos, aludiendo al dinero (euros), en problemas de fraccionamiento, permitiendo resolverlas de manera intuitiva, dando sentido a la idea de fracción operador. Se observa, en las primeras sesiones de clase, que las tareas llevan a los estudiantes a relacionar conceptos, procedimientos y darles significados. Sin embargo, en las últimas clases, donde se enseñan las operaciones con fracciones, prevalecen las tareas de reproducción, es decir, se busca que los estudiantes recuerden y demuestren que dominan los procedimientos de cálculo.

Sobre las representaciones, introduce la suma y la resta de fracciones con igual denominador mediante tareas que utilizan la representación figural, que conlleva juntar o quitar las partes para formar un total, es decir tareas que en las que subyace un planteamiento directo (conocen las partes o cantidades y se pide el total). Posteriormente, el trabajo se desvincula de la representación figural centrándose únicamente en los procedimientos de cálculo con las representaciones simbólicas, asociado a diferentes métodos de cálculo: buscando fracciones equivalentes, productos cruzados y calculando el mínimo común múltiplo. Aunque se presentan tres procedimientos para sumar fracciones, prevalece la intención operatoria. Para el caso de la multiplicación y división de fracciones, que envuelven una complejidad conceptual superior a la suma y resta, el trabajo se centra igualmente en los procedimientos. Para el caso de la división de fracciones refuerza la idea de multiplicar en cruz (“hacer el dibujito”, las líneas que indican el orden de las operaciones).

Sobre *saber elegir los sistemas de representación* para la enseñanza de los contenidos, observamos que el profesor contantemente emplea la representación verbal, simbólica y figural, y establece relaciones entre ellas. Así, la relación entre las distintas representaciones ayuda a los estudiantes a comprender las tareas, dado que a veces la formulación sólo verbal o simbólica no lleva a una correcta solución. Por ejemplo, en la tarea “[…] 15 niños han votado que sí y representa tres quintos de la clase, ¿cuántos niños hay en total en la clase?”, que envuelve el significado de fracción como operador, la mayoría de los estudiantes calcularon “”. Esto llevó al profesor a solicitar que representaran la situación mediante un dibujo (figura), vinculando distintas representaciones, como se ilustra en la figura 4.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tres quintos de la clase son 15 | tarta.png | Untitled.png |
| **Figura 4**- Representaciones empleadas en clase | | |

A lo largo de las sesiones *los materiales y recursos que se emplean son* diversos, como el papel para ilustrar cuando las partes de una figura tienen el mismo tamaño. Para trabajar la fracción como operador (fracción de una cantidad) emplea fichas de colores (cantidades discretas). También utiliza recursos tecnológicos como las hojas de Excel (función *mínimo común múltiplo*) que permite calcular el mínimo común múltiplo de varios números. Esta herramienta ayuda a comprobar los ejercicios que han realizado con papel y lápiz.

En general, en cada clase observamos un repertorio de tareas que permiten introducir o reforzar algún concepto, cambiar de representaciones, reforzar o ejercitar los procedimientos. Así podemos inferir que la enseñanza está organizada en las siguientes fases: a) puesta en común de las soluciones de las tareas dejadas en la clase anterior, b) resolución de tareas que implican trabajar un concepto o un procedimiento, c) refuerzo de las ideas básicas, introducción de conceptos o procedimientos, y d) repaso y ejercitación de lo enseñado.

**Conclusiones**

Una idea central que surge, del análisis de las sesiones de clase, es que el profesor enseña los números racionales como números fraccionarios. La enseñanza del contenido se desvincula de los aspectos matemáticos formales y se centra en dar sentido a la representación fraccionaria del número racional, según distintos significados. Explícitamente el profesor trabaja la fracción como parte- todo y operador y en alguna ocasión alude al significado de fracción como cociente. Predomina el significado de parte-todo en la conceptualización de la facción, especialmente en situaciones que llevan a pasar de la representación figural a la simbólica (expresar con una fracción las partes pintadas), complementando con tareas que envuelven trabajar distintas magnitudes (longitud, superficie), identificar la unidad, completar la unidad, entre otras.

El significado de fracción como parte-todo se conecta con el significado de fracción como operador; aunque, como destacan Escolano y Gairín (2005), la relación parte- todo no tiene significado como operador (p. 22). Sin embargo, el profesor, a partir de la relación que establece entre dos números naturales y la presentación gráfica (fracción como parte- todo), da significado a las operaciones (multiplicar y dividir) que impone la función racional. Además, esto permite considerar que el todo o unidad puede ser una cantidad discreta. En el caso del fraccionamiento, propone al menos dos formas: y . En las operaciones para la multiplicar y dividir fracciones, presenta dominio de los algoritmos de cálculos. Esto nos lleva a establecer que el profesor muestra un buen manejo de los procedimientos matemáticos enunciados (operar correctamente, plantear y resolver situaciones matemáticas), teniendo conocimiento del tema (KoT), en lo mencionado, de la enseñanza de los números racionales.

En las actividades que involucran indagación, exploración o ejercitación el profesor también permite espacios para la reflexión buscando que los estudiantes modifiquen la comprensión matemática de lo abordado cuando resuelven incorrectamente. Dentro de estas estrategias de enseñanza, el profesor refleja conocer los errores y las dificultades que los estudiantes presentan al trabajar el tema matemático, desarrolla explicaciones y enuncia tareas que refuerzan los conceptos o procedimientos matemáticos, lo que lleva a inferir que el profesor tiene conocimiento de las características de aprendizaje de los números racionales, igualmente de las características de la enseñanza del tema matemático. Esto último, al emplear distintas estrategias de enseñanza (cambio de representaciones, trabajo con material concreto) para abordar los errores y dificultades asociados con el tema y de modo de permitir a los estudiantes adquirir o reforzar el contenido y, principalmente, desarrollar líneas argumentales que facilitaron la adquisición de los conceptos y los procedimientos matemáticos estudiados. Los sistemas de representación verbal, simbólico y figural fueron los más usados en la enseñanza del tema, complementándose, en ocasiones, con materiales manipulativos; aspectos necesarios en los primeros años escolares donde se introduce el contenido de los números racionales (CASTRO; TORRALBO, 2008).

En resumen, el análisis de las clases observadas sobre la enseñanza de los números racionales ha puesto de relieve un predominio de situaciones en las que destaca el conocimiento didáctico del contenido y, en menor grado, de conocimiento matemático. De este hecho no podemos inferir ausencias o lagunas en el dominio del conocimiento matemático (justificables, en cualquier caso por su formación como maestro generalista), ya que, por un lado, la observación del aula no es la única fuente de la que los investigadores podemos extraer indicios del conocimiento del profesor, y, por otro lado, la ausencia de muestra de conocimiento no significa su carencia. Independientemente de esta elucubración sobre la procedencia o explicación de los resultados en cuanto al predominio de un dominio sobre otro, asunto que es poco tangible, el análisis ha mostrado la importancia de profundizar en situaciones de aula para tratar de comprender mejor los elementos que integran el conocimiento del profesor. Esto nos lleva a seguir en la dirección de comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, donde los elementos teóricos empleados son un referente potente para comprender este conocimiento.

**Referencias**

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, Las Vegas, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov. 2008.

BALL, D. L. Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, v. 51, n. 3, p. 241-247. 2000.

CASTRO, E.; TORRALBO, M. Fracciones en el currículo de la educación primaria. En: CASTRO.E (Ed.), **Didáctica de la matemática de la educación primaria**. Editorial Síntesis Educación. España, 2008. p. 285-314.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. Londres: Routledge, 2011.

ENGLISH, L. Setting an agenda for international research in mathematics education. In: ENGLISH, L. (Ed.), **Handbook of international research in mathematics education**. New York: Routledge, 2008. p. 3-19.

ESCOLANO, R.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. **UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Reston VA, n. 1, p.17-35, Abril. 2005.

FOX, D. J. **El proceso de investigación en la educación***.* Pamplona: Eunsa.1981.

GÓMEZ, P. **Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria**. Tesis doctoral: Universidad de Granada. España. 2007.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston VA, v. 39, n. 4, p. 372-400, July. 2008.

HILL, H. C.; BLUNK, M. L.; CHARALAMBOUS, C. Y.; LEWIS, J. M.; PHELPS, G. C., SLEEP, L.; BALL, D. L. Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. **Cognition and Instruction**, Mahwah, New Jersey, v. 26, n. 4, p. 430-511, July. 2008.

KRIPPENDORFF, K. **Metodología del análisis de contenido**. Barcelona, España: Paidós Ibérica.1990.

LUPIÁÑEZ, J. L. (2009). **Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de educación secundaria**. Tesis doctoral: Universidad de Granada. España. 2009.

MARTÍNEZ, M.; GINÉ, C.; FERNÁNDEZ, S.; FIGUEIRAS, L.; DEULOFEU. J. El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN, Cuidad Real. **Investigación en Educación Matemática XV**, Cuidad Real. España, 2011. p. 429-437

OCDE. Teachers for tomorrow’s schools. Analysis of the world education indicators. Executive Summary. Organization for economic Co-operation and Development. **UNESCO Institute for Statistics**. World Education Indicators Programme. París: Francia. 2001.

RIBEIRO, C. M. Conhecimento matemático para ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 22, n. 34, p. 1-26. 2009.

RICO, L. **Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria**.Madrid: Síntesis.1997a.

RICO, L. **La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria**. Barcelona, Horsori. 1997b.

RODRÍGUEZ, G.; GIL, J.; GARCÍA, E. **Metodología de la investigación cualitativa**. Ediciones Aljibe.1996.

SCHOENFELD, A. H. Bharath Sriraman and Lyn English: theories of mathematics education: seeking new frontiers. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L (Eds.), **Theories of mathematics education. Seeking new frontiers**. ZDM. Mathematics Education. (Springer series: advances in mathematics education). 2010. p. 503-506.

SHULMAN, L. S. Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform. **Harvard** **Educational Review**,Harvard, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p.4-14, Feb. 1986.

STAKE, R. **Investigación con estudio de casos**. Ediciones Morata, S.L. 2007.

1. \* Aurores [↑](#footnote-ref-1)
2. Conservamos las siglas en inglés del modelo. [↑](#footnote-ref-2)
3. Una discusión más amplia ver en (AUTOR, año). [↑](#footnote-ref-3)
4. Las conexiones intraconceptuales, que implican enlaces hacia el interior de un mismo concepto, entrarían en el KoT. [↑](#footnote-ref-4)
5. Las *tareas matemáticas* se indican en los subdominio KoT, KFLM y KMT y tiene indicadores de conocimiento diferentes respecto de cada dominio. Por ejemplo, las tareas nos permiten ver los significados de las fracciones siendo un aspecto de KoT, ahora si el profesor usa criterios explícitos para justificar que la tarea es adecuada al nivel escolar de enseñanza estaríamos en el KMT. [↑](#footnote-ref-5)